Georges FOULON

TRIGONOMÉTRIE



ÉDITIONS MAGNARD, 107, boulevard Raspail, PARIS

Georges FOULON

TRIGONOMÉTRIE



ÉDITIONS MAGNARD, 107, boulevard Raspail, PARIS

Georges FOULON

Professeur agrégé au Lycée Carnot
Ancien Élève de l'École normale supérieure

TRIGONOMÉTRIE

Troisième édition



ÉDITIONS MAGNARD, 107, boulevard Raspail, PARIS

TRIGONOMÉTRIE

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1. La Trigonométrie a pour but la définition et l'étude des **fonctions circulaires** et leurs applications à la mesure des éléments des figures et en particulier des triangles.

Nous commencerons par donner un certain nombre de propositions relatives aux arcs de cercles.

2. Mesure des arcs de cercles. — Considérons, sur un cercle de centre O un arc de cercle AB. Il existe pour mesurer cet arc de cercle trois systèmes d'unités :

1° Le système du degré, où l'unité principale est le *degré*, qui est la 360e partie de la circonférence; le degré se divise en 60 minutes (60′) et la minute en 60 secondes (60″). On voit que les opérations sur des arcs mesurés dans ce système sont assez compliquées.

2° Le système du grade, où l'unité principale est le *grade*, qui est la 400e partie de la circonférence. Le grade a d'abord été défini par l'angle au centre correspondant, qui est la centième partie de l'angle droit. Le grade se divise en dixièmes, centièmes, etc. Pour conserver avec le premier système une certaine analogie on a appelé minute de grade le centième de grade et seconde de grade de dix-millième de grade. Ce système a sur le précédent l'avantage que les calculs se font dans le système décimal.

3° Ces deux systèmes sont employés dans les calculs pratiques. Dans les recherches théoriques on utilise le système du *radian*, dans lequel l'unité d'arc est dans un cercle de rayon R *l'arc qui a pour longueur* R.

Cherchons la mesure d'une circonférence quelconque de rayon R en radians. Nous utiliserons le théorème suivant qu'on démontre en arithmétique.

Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient des nombres qui les mesurent quelle que soit l'unité choisie pour faire ces mesures.

Soit AB l'arc de la circonférence dont la longueur est égale au rayon R.

Si nous prenons comme unité de mesure l'unité de longueur, par définition l'arc AB a pour mesure R; la circonférence entière a pour mesure $2\pi R$. Si nous prenons comme unité le radian, l'arc AB a pour mesure 1; soit x la mesure de la circonférence en radians; écrivons, avec les deux systèmes d'unités, la valeur du rapport de la circonférence entière à l'arc AB; nous obtenons d'après le théorème rappelé :

$$\frac{\text{circonférence}}{\text{arc AB}} = \frac{x}{1} = \frac{2\pi R}{R}$$

d'où l'on déduit : $x = 2\pi$.

Ainsi : dans une circonférence quelconque, la mesure de la circonférence en radians est 2π.

La demi-circonférence a pour mesure π, le quart de la circonférence, appelé *quadrant*, a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

3. Passage d'un système de mesure à l'autre. — On utilise le même théorème que précédemment, en écrivant, dans les trois systèmes le rapport de l'arc considéré à la demi-circonférence.

Soit α la mesure de l'arc en degrés, β sa mesure en grades, x sa mesure en radians; dans les trois systèmes d'unités, la demi-circonférence a pour mesures respectives 180, 200 et π, et l'on a :

$$\frac{\text{arc}}{\frac{1}{2}\text{ circonférence}} = \frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{x}{\pi}$$

Ces égalités résolvent complètement le problème du changement d'unités.

En particulier, on a :

$$x = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Cette formule donne, pour les mesures respectives en radians des arcs de 30°, 45°, 60°, 90° :

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}.$$

Ces nombres seront constamment utilisés.

Tout ce qui précède s'applique sans modifications aux angles au centre interceptant sur le cercle ces différents arcs, angles qui ont mêmes mesures que les arcs interceptés.

GENERÂLISATION DE LA NOTION D'ARC DE CERCLE

4. Cercle orienté. — On appelle *cercle orienté* un cercle sur lequel on a choisi un point fixe A, appelé origine des arcs et un sens de parcours appelé sens positif. C'est le sens inverse du sens des aiguilles d'une montre; le sens contraire se nomme le sens négatif.

Considérons sur un cercle orienté un point mobile M partant de l'origine A et se déplaçant dans le sens positif; désignons par x la mesure en radians de l'arc décrit depuis le point de départ A.

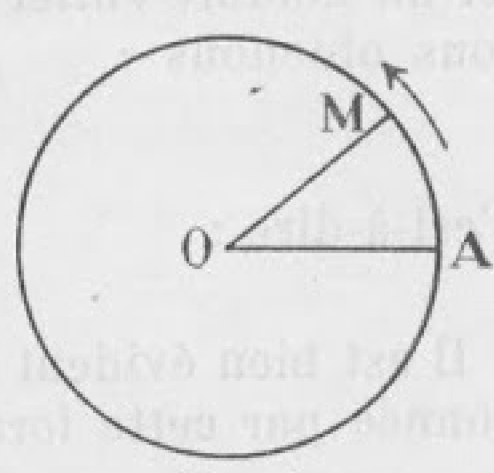


Fig. 1.

Le point M peut faire à partir de A, sur le cercle, un nombre de tours qui peut être aussi grand que l'on veut et, par suite, le nombre x peut prendre une valeur positive aussi grande que l'on veut. Si le point mobile partant de A se déplace dans le sens négatif, il peut aussi faire à partir de A un nombre de tours négatifs aussi grand que l'on veut en valeur absolue, de sorte qu'un arc de ce cercle ainsi défini est une grandeur algébrique qui peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

Cette définition constitue la généralisation de la notion d'arc.

Il est bien évident que cette généralisation s'étend d'elle-même aux angles au centre ayant pour côté fixe le rayon OA, et dont le second côté est le rayon OM.

Considérons, maintenant, sur un cercle orienté d'origine A un point fixe M. Il est évident qu'il existe une infinité d'arcs ayant A pour origine et M pour extrémités.

Nous allons démontrer que ***les mesures en radians de tous ces arcs sont comprises dans la formule :***

$$x = \alpha + 2k\pi,$$

dans laquelle α est la mesure de l'un quelconque d'entre eux, et k un nombre entier positif, négatif ou nul.

Désignons par AM le plus petit arc positif d'origine A, et d'extrémité M; pour décrire un arc quelconque d'origine A terminé en M, on pourra d'abord décrire l'arc positif AM, puis, à partir de M, pour y revenir il faudra décrire, soit dans le sens positif, soit dans le sens négatif, un nombre entier de circonférences; si h est le nombre algébrique entier de ces circonférences, la mesure de l'arc considéré sera :

$$x = \widehat{AM} + 2h\pi.$$

Considérons maintenant un second arc d'origine A terminé en M; on verra de la même façon que sa mesure est de la forme :

$$\alpha = \widehat{AM} + 2h'\pi.$$

Des deux égalités précédentes on déduit, par soustraction :

$$x - \alpha = 2(h - h')\pi.$$

La différence $h - h'$ de deux nombres entiers algébriques est un nombre entier positif, négatif ou nul, et en posant $h - h' = k$, nous obtenons :

$$x - \alpha = 2k\pi,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{x = \alpha + 2k\pi.} \qquad (1)$$

Il est bien évident que, réciproquement, tout arc dont la mesure est donnée par cette formule est terminé au même point M que l'arc α.

Remarques. — I. Si x et α étaient les mesures des arcs en degrés ou en grades, il faudrait remplacer la relation obtenue par l'une des relations :

$$x = \alpha + 360\,k \quad \text{ou} \quad x = \alpha + 400\,k.$$

II. Les formules qu'on vient d'établir donnent les mesures de tous les angles que forme avec la demi-droite fixe OA la demi-droite OM.

5. Relation de Chasles sur un cercle orienté. — Considérons, sur un cercle dirigé, des points A, B, C, D, E, rangés dans un ordre quelconque. Soit α la mesure du plus petit arc positif, d'origine A et d'extrémité B, β celle du plus petit arc positif d'origine B et d'extrémité C, γ celle du plus petit arc positif d'origine C et d'extrémité D, etc.; δ, ε les mesures des arcs DE et EA, définis de la même façon. Si un mobile engendre tous ces arcs en marchant toujours dans le sens positif, quand, parti de A, il y revient, il a parcouru un nombre entier de cercles, et si n est ce nombre, on a :

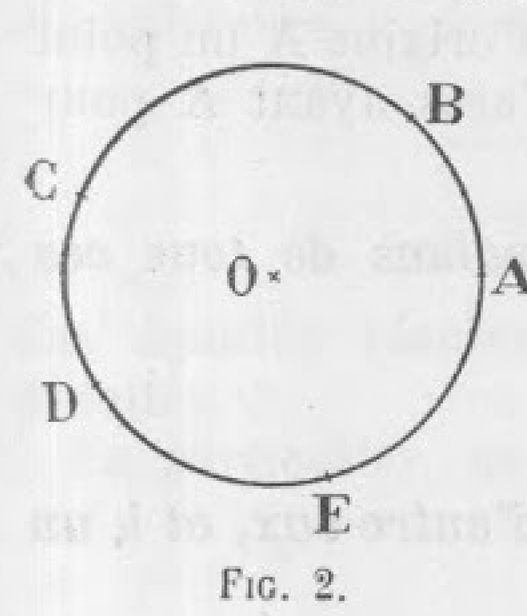


FIG. 2.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 2n\pi.$$

Soient maintenant AB, BC, CD, DE, EA, des arcs quelconques ayant mêmes origines et mêmes extrémités, respectivement, que les précédents, on a :

$$\widehat{AB} = \alpha + 2h\pi; \qquad \widehat{BC} = \beta + 2h'\pi;$$

$$\widehat{CD} = \gamma + 2h''\pi; \qquad \widehat{DE} = \delta + 2h'''\pi; \qquad \widehat{EA} = \varepsilon + 2h''''\pi.$$

En ajoutant, on obtient :

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA}$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + 2(h + h' + h'' + h''' + h'''')\pi,$$

c'est-à-dire : $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA} = 2K\pi$,

K étant un nombre entier positif, négatif ou nul.

C'est la relation de Chasles sur un cercle dirigé.

En particulier, pour trois points A, B, C, on a :

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 2k\pi;$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} + 2k'\pi.$$

6. Les applications sont analogues à celles que l'on fait en géométrie pour les points sur un axe.

On appelle abscisse curviligne d'un point d'un cercle orienté d'origine A la mesure algébrique de l'un des arcs d'origine A et d'extrémité M. Si x est cette abscisse et $\widehat{AM}$ un des arcs terminés en M, on a :

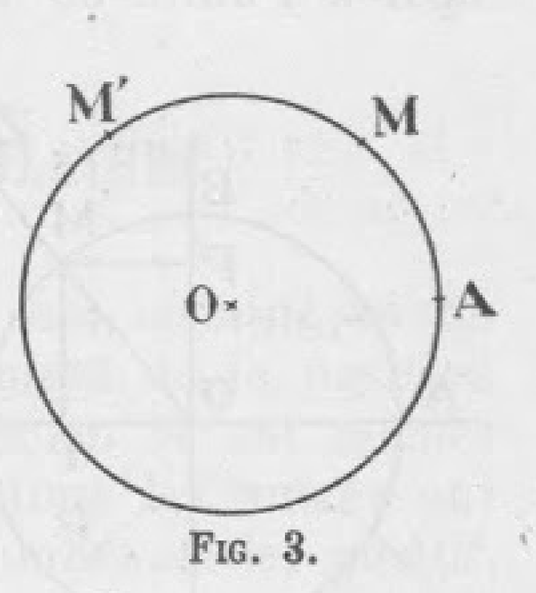


FIG. 3.

$$x = \widehat{AM} + 2h\pi.$$

L'abscisse curviligne n'est définie qu'à $2h\pi$ près.

Soient M et M′ deux points d'abscisses curvilignes x et x', on a

$$\widehat{AM} = x + 2k\pi;$$

$$\widehat{AM'} = x' + 2k'\pi;$$

et la relation de Chasles donne :

$$\widehat{AM} + \widehat{MM'} = \widehat{AM'} + 2h\pi;$$

d'où :

$$\widehat{MM'} = \widehat{AM'} - \widehat{AM} + 2h\pi = x' - x + 2(k' - k + h)\pi;$$

$$\widehat{MM'} = x' - x + 2l\pi,$$

k, k', h, l, étant des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls.

Ces diverses relations s'étendent aux angles au centre interceptant les arcs correspondants.

CHAPITRE II

DÉFINITION DES FONCTIONS CIRCULAIRES

DEFINITION DU CERCLE TRIGONOMETRIQUE

7. On appelle **cercle trigonométrique** un cercle orienté de rayon égal à l'unité de longueur accompagné de deux axes rectangulaires A'A, B'B passant par son centre. L'origine A des arcs se trouve sur la partie positive du premier qui se nomme l'axe des cosinus; le second, B'B, appelé axe des sinus est dirigé de telle façon que l'arc positif AB soit égal à $+\frac{\pi}{2}$.

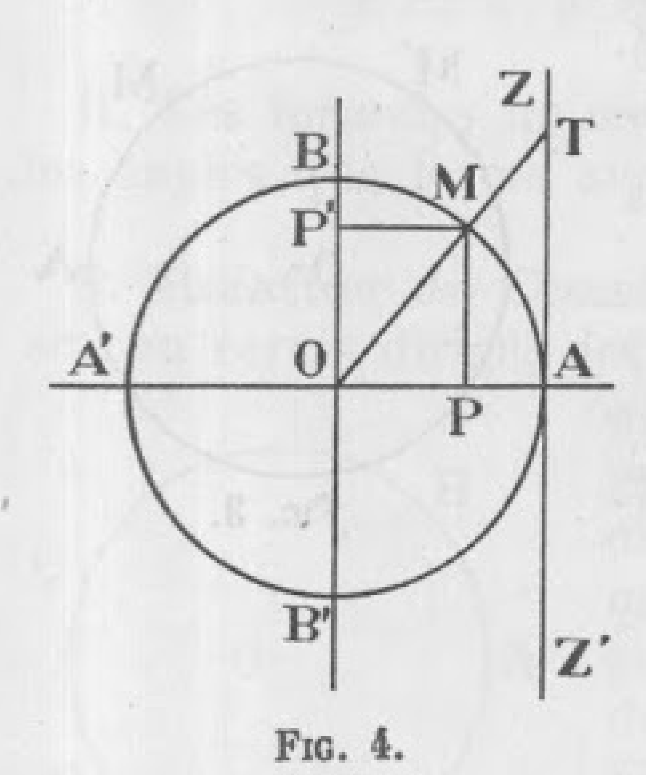


FIG. 4.

On adjoint à ces axes un troisième axe Z'Z, appelé axe des tangentes, porté par la tangente en A au cercle et dirigé dans le même sens que l'axe des sinus.

Les quatre points A, B, A', B', partagent le cercle trigonométrique en quatre quadrants, qui sont numérotés dans l'ordre où on les rencontre en marchant dans le sens positif à partir de A : 1, 2, 3 et 4.

Les abscisses curvilignes positives et inférieures à 2π des extrémités des quatre quadrants sont : $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.

8. Définition des fonctions circulaires d'un arc x.

Soit M un point du cercle trigonométrique que nous plaçons, sur la figure, dans le premier quadrant. Soit P et P' les projections orthogonales du point M sur les deux axes A'A et B'B et T le point de rencontre du rayon OM et de l'axe des tangentes.

On appelle ***cosinus et sinus de l'un des arcs x d'origine* A *et d'extrémité* M *l'abscisse et l'ordonnée du point* M *dans le système d'axes rectangulaires*** A'A, B'B, et l'on écrit :

$$\cos x = \overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{P'M}};$$

$$\sin x = \overline{\mathrm{OP'}} = \overline{\mathrm{PM}}.$$

On appelle tangente de l'arc x l'ordonnée du point T dans le même système d'axes, et l'on écrit :

$$\mathrm{tg}\, x = \overline{\mathrm{AT}};$$

cos x, sin x et tg x, sont les trois fonctions circulaires principales ou lignes trigonométriques principales de l'arc x. On leur adjoint une quatrième, appelée cotangente et qui est l'inverse de la tangente :

$$\mathrm{cotg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}.$$

Les quatre lignes trigonométriques sont des fonctions de la variable x, dont nous allons étudier les variations.

VARIATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES

9. La définition des fonctions circulaires d'un arc terminé en un point M du cercle trigonométrique dépend seulement de la position de ce point, et, par suite, tous les arcs terminés en M ont mêmes fonctions circulaires. Si x est l'un de ces arcs, tous les autres ont des valeurs de la forme $x + 2k\pi$, où k est un nombre entier positif, négatif ou nul, et l'on a :

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x;$$

$$\mathrm{tg}(x + 2k\pi) = \mathrm{tg}\, x; \qquad \mathrm{cotg}(x + 2k\pi) = \mathrm{cotg}\, x.$$

On dit que ***les fonctions circulaires sont des fonctions périodiques de période 2π.***

Il résulte de là que les fonctions circulaires reprennent les mêmes valeurs chaque fois que l'arc x augmente d'un multiple, positif ou négatif, de 2π, et pour étudier leurs variations, il suffira de les étudier quand l'arc x varie dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ d'une période, c'est-à-dire quand le point M décrit une fois le cercle trigonométrique dans le sens positif. Elles varieront de la même façon dans tout autre intervalle égal à 2π. Et si l'on a construit l'arc de courbe représentant dans un système d'axes rectangulaires la variation de l'une d'entre elles, on en déduira la courbe représentant ces variations, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, en faisant subir à cet arc des

translations successives parallèlement à l'axe des x et égales aux multiples positifs ou négatifs de 2π.

10. Variations du sinus et du cosinus.

Les variations des deux fonctions $y = \sin x$ et $y = \cos x$ s'obtiennent de suite en suivant les déplacements du point P′ sur l'axe des sinus et du point P sur l'axe des cosinus quand le point M décrit une fois le cercle trigonométrique dans le sens positif. On obtient le tableau suivant de ces variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y = \sin x$	0	↗	1 max.	↘	0	↘	-1 min.	↗	0
$y = \cos x$	1 max.	↘	0	↘	-1 min.	↗	0	↗	1 max.

Les courbes représentatives se nomment des **sinusoïdes** ; nous avons représenté en pointillé celle qui correspond au cosinus, accentué un peu le trait des arcs relatifs à la période étudiée et indiqué la forme générale des courbes quand l'arc prend toutes les valeurs.

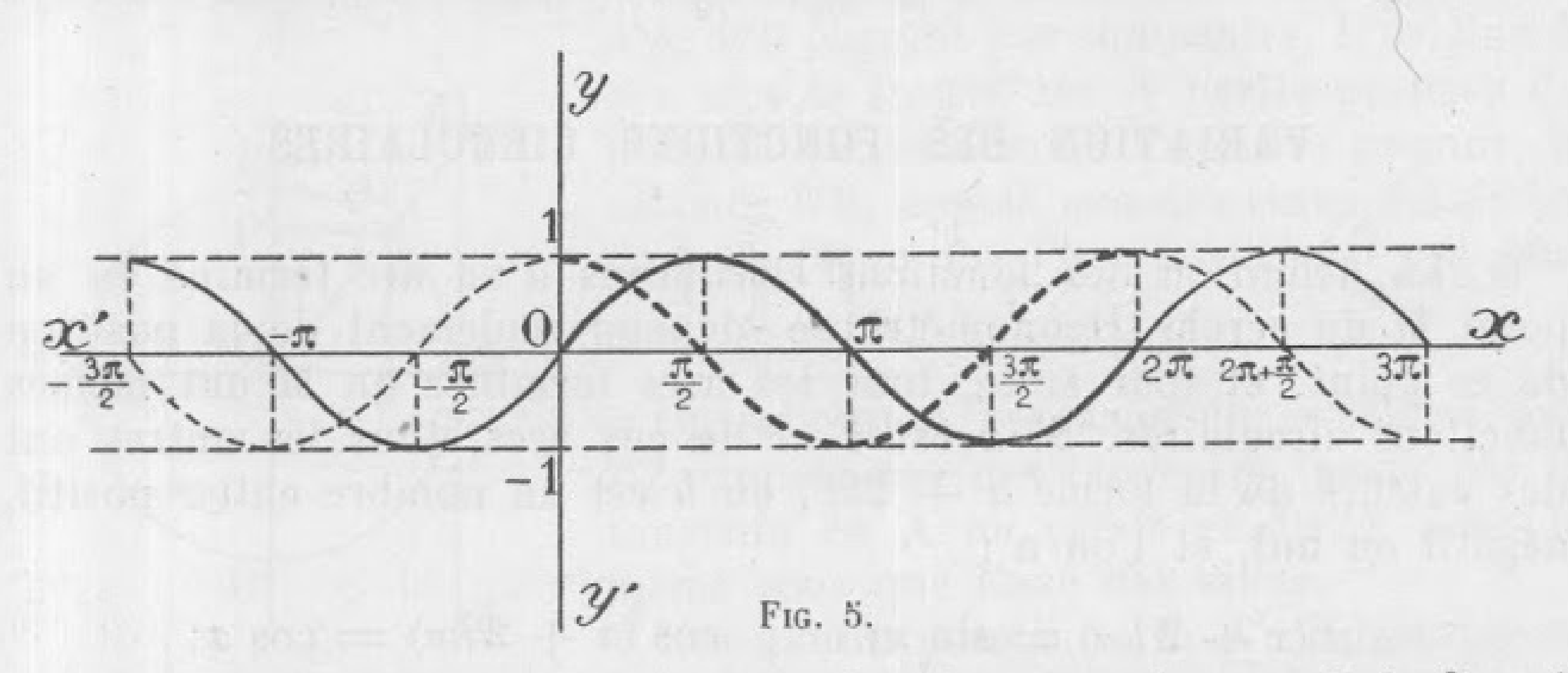


FIG. 5.

Nous verrons, dans la suite, que les deux courbes sont égales et peuvent être amenées en coïncidence par une translation parallèlement à l'axe des x égale a : $\frac{\pi}{2}$.

11. Remarques importantes. — Il résulte de cette étude que le sinus et le cosinus sont toujours compris entre -1 et $+1$.

Le sinus est positif quand le point M est dans les deux premiers quadrants; négatif quand il est dans les deux autres.

Le cosinus est positif quand le point M est dans le premier ou le quatrième quadrant; négatif quand il est dans les deux autres.

Cela résultait, d'ailleurs, immédiatement de la définition du sinus et du cosinus comme coordonnées du point M dans le système des axes A′A et B′B du cercle trigonométrique.

12. Variation de la tangente et de la cotangente.

Si nous revenons à la définition de la tangente et si M′ est, sur le cercle trigonométrique, le point diamétralement opposé au point M, les arcs terminés en M et M′ ont même tangente : $\overline{AT}$. Si x est la mesure d'un arc terminé en M, $x + \pi$ mesure un arc terminé en M′, et l'on a :

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

FIG. 6.

La tangente a seulement pour période π, et il suffit d'étudier sa variation dans un intervalle égal à π; prenons l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Quand l'arc x varie dans cet intervalle, le point T décrit l'axe Z′Z et sa tangente prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, en passant par O quand le point M est en A.

$\operatorname{Cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ varie en sens inverse de tg x, et nous pouvons faire le tableau suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{tg} x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$y = \operatorname{cotg} x$	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0

Les courbes représentatives ont les formes indiquées par la figure; la courbe relative à la cotangente est dessinée en pointillé. Nous avons marqué d'un trait plus fort la partie correspondant à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ d'une période.

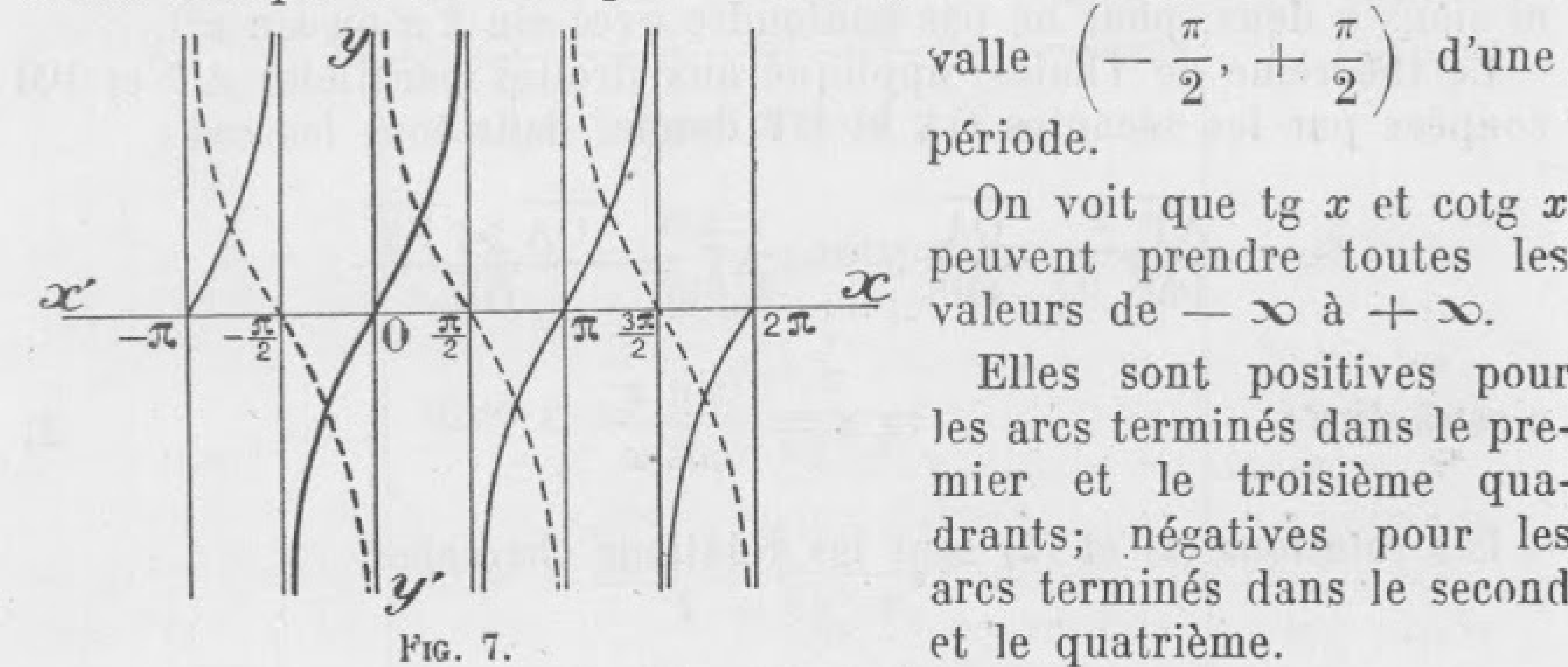


FIG. 7.

On voit que tg x et cotg x peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

Elles sont positives pour les arcs terminés dans le premier et le troisième quadrants; négatives pour les arcs terminés dans le second et le quatrième.

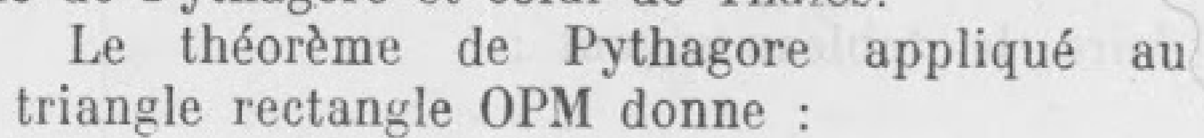
$y = \operatorname{tg} x$ présente des discontinuités pour : $x = +\frac{\pi}{2} + k\pi$;

$$y = \operatorname{cotg} x, \text{ pour : } x = + k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque.

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS CIRCULAIRES D'UN MEME ARC

13. On reconnaît facilement soit avec le cercle trigonométrique, soit en se servant des courbes représentatives qu'un arc est déterminé si l'on se donne une des fonctions circulaires de cet arc. Nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur cette question. Ses lignes trigonométriques sont donc déterminées et, par conséquent, il doit exister entre elles trois relations distinctes permettant de calculer trois d'entre elles quand la quatrième est donnée. Nous connaissons déjà une de ces relations qui est la définition de la cotangente. Les deux autres sont des interprétations de deux théorèmes importants de géométrie : le théorème de Pythagore et celui de Thalès.



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OPM donne :

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2;$$

c'est-à-dire :

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

Pour éviter les parenthèses, on convient d'écrire :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad (1)$$

ce qui se lit sinus carré x + cosinus carré $x = 1$ (il ne faut pas dire sinus deux x, ni sinus x deux, pour ne pas confondre avec $\sin 2x$ ou $\sin x^2$).

FIG. 8.

Le théorème de Thalès, appliqué aux droites parallèles AT et PM coupées par les sécantes OA et OT donne, dans tous les cas :

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}, \qquad \overline{AT} = \frac{\overline{OA} \times \overline{PM}}{\overline{OP}};$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) sont les relations cherchées.

14. Applications :

1° Connaissant $\sin x$, calculer $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

La relation (1) donne :

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x; \qquad \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

On a ensuite :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$$

2° Connaissant $\operatorname{tg} x$, calculer $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$.

Il suffit de résoudre le système des deux équations en $\sin x$ et $\cos x$:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x; \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

La première donne :

$$\sin x = \operatorname{tg} x . \cos x;$$

et, en portant dans la seconde, on obtient :

$$(\operatorname{tg}^2 x + 1) \cos^2 x = 1; \quad \text{d'où :} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \qquad (3)$$

On a ensuite : $$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \qquad (4)$$

Les relations (3) et (4) sont fréquemment utilisées.

Nous réunissons dans le tableau suivant les formules qu'il est nécessaire de bien connaître.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \ \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS CIRCULAIRES DE CERTAINS ARCS

15. Arcs opposés. — Si x est la mesure d'un arc, l'arc opposé a pour mesure $-x$. Deux arcs opposés ont évidemment leurs extrémités M et M' symétriques par rapport à l'axe des cosinus, car A est le milieu de l'arc MM'. Ils ont donc même cosinus $\overline{OP}$ et des sinus opposés $\overline{PM}$ et $\overline{PM'}$. Donc :

$$\sin(-x) = -\sin x;$$
$$\cos(-x) = \cos x;$$

et, par suite :

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

Arcs diamétraux. — Ce sont deux arcs dont les extrémités M et M_1 sont diamétralement opposées sur le cercle trigonométrique. Si l'un des arcs est x, l'autre est $\pi + x$. Les coordonnées des deux points M et M_1, symétriques par rapport à l'origine O dans le système d'axes A'A, B'B sont opposées.

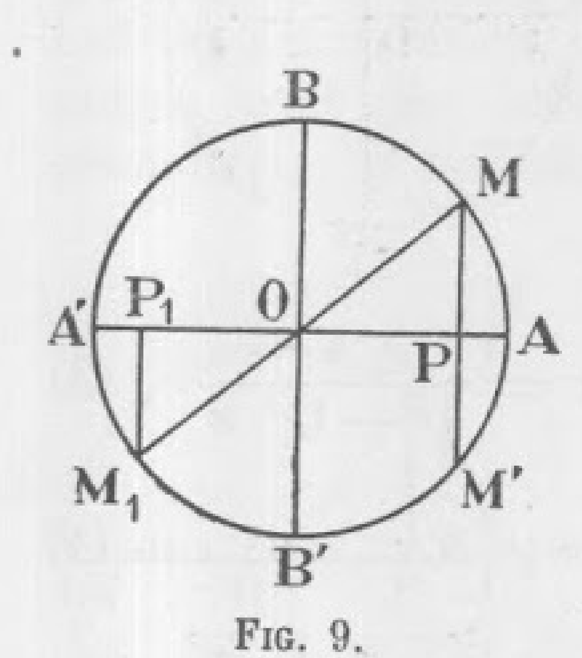


Fig. 9.

Donc :

$$\sin(\pi + x) = -\sin x;$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x;$$

et :

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x.$$

On voit que tg x et cotg x ont bien pour période π, comme nous l'avons déjà établi.

16. Nous établirons, pour continuer, la proposition suivante : *les extrémités de deux arcs quelconques sont symétriques par rapport au diamètre du cercle trigonométrique qui passe par l'extrémité de l'arc égal à leur demi-somme.*

Soit x et y les mesures des deux arcs considérés; posons :

$$\frac{x+y}{2} = \alpha;$$

$$\frac{x-y}{2} = \beta.$$

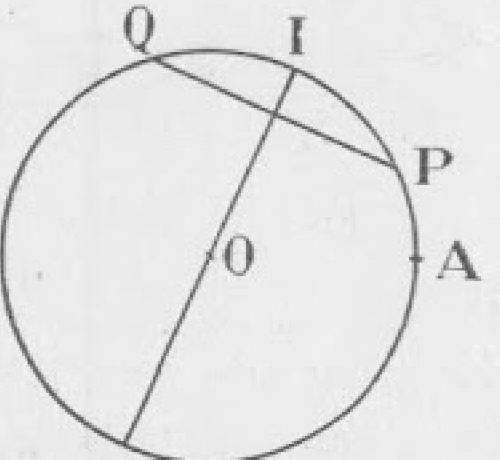


Fig. 10.

En ajoutant puis en retranchant, membres à membres, on obtient :

$$x = \alpha + \beta; \qquad y = \alpha - \beta.$$

Donc, pour construire les extrémités P et Q des deux arcs, on pourra d'abord construire l'arc AI égal à la demi-somme α, puis, à partir de I on portera de part et d'autre un arc égal à β.

Le point I étant le milieu de l'arc PQ, P et Q sont symétriques par rapport au diamètre OI.

17. Arcs supplémentaires. — On dit que deux arcs sont supplémentaires si leur somme est égale à π; si x est l'un des arcs, l'autre est $\pi - x$.

La demi-somme des deux arcs étant égale à $\frac{\pi}{2}$ leurs extrémités M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des sinus : elles ont même ordonnée et des abscisses opposées :

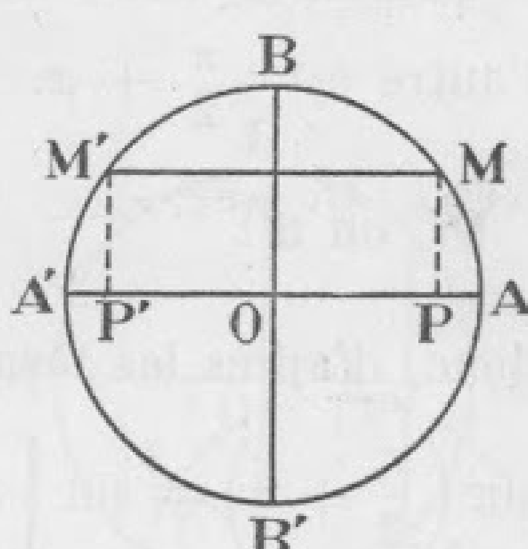


Fig. 11.

$$\sin(\pi - x) = \sin x;$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x;$$

et :

$$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x.$$

18. Arcs complémentaires. — On dit que deux arcs sont complémentaires si leur somme est égale à $\frac{\pi}{2}$. Si l'un des arcs est x, l'autre est $\frac{\pi}{2} - x$. Leur demi-somme étant $\frac{\pi}{4}$ leurs extrémités sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle AOB, qui passe par l'extrémité I de l'arc $\frac{\pi}{4}$.

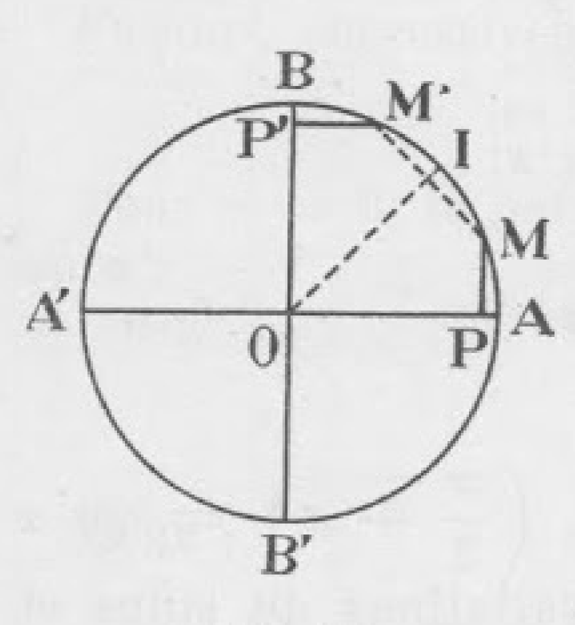


Fig. 12.

Soit M et M' ces extrémités.

Nous savons que si deux points sont symétriques par rapport à la première bissectrice de l'angle des axes, leurs coordonnées s'échangent. On le voit d'ailleurs de suite sur la figure, en menant MP perpendiculaire sur A'A et M'P' perpendiculaire sur B'B; les deux contours OPM et OP'M' étant symétriques par rapport à OI, on a :

$$\overline{OP'} = \overline{OP}; \qquad \overline{P'M'} = \overline{PM}.$$

c'est-à-dire :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x;$$

et : $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x;$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x.$$

19. Arcs dont la différence est $\frac{\pi}{2}$. — Si l'un des arcs est x, l'autre est : $\frac{\pi}{2} + x$.

Or, on a : $$\frac{\pi}{2} + x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

donc, d'après les formules établies précédemment :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x;$$

ainsi : $$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotg} x;$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x.$$

20. Remarques. — I. La relation : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ montre que les courbes qui représentent les variations du sinus et du cosinus sont égales; elles se déduisent l'une de l'autre par une translation, parallèlement à l'axe des x, et égale à : $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

Il est très facile de retenir les relations que l'on vient d'établir de la façon suivante : si on considère les trois fonctions circulaires principales, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, quand on change x en $-x$, seul le cosinus ne change pas de signe; c'est le sinus quand on change x en $\pi - x$ et la tangente quand on change x en $\pi + x$.

Pour les arcs complémentaires, il suffit de se rappeler que le préfixe co signifie complément; le cosinus d'un arc est le sinus du complément; la cotangente est la tangente du complément.

CALCUL DES FONCTIONS CIRCULAIRES DE QUELQUES ARCS

21. On rencontre, dans les applications, quelques arcs dont il est nécessaire de bien connaître les fonctions circulaires, par exemple les arcs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ ou leurs suppléments. Leur calcul repose sur la remarque suivante :

Si a_m et c_m sont l'apothème et le côté du polygone régulier convexe de m côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, on a :

$$\cos\frac{\pi}{m} = a_m; \quad \sin\frac{\pi}{m} = \frac{c_m}{2}.$$



Fig. 13.

Il suffit pour le voir de placer un des côtés du polygone de façon que son apothème OP soit portée par le rayon OA du cercle trigonométrique. Le côté M'M est alors perpendiculaire en son milieu P sur OA, l'arc M'M est égal à $\frac{2\pi}{m}$ et l'arc AM égal à $\frac{\pi}{m}$. Les deux relations annoncées sont alors immédiates.

Faisons, successivement :

$$m = 6; \quad m = 4; \quad m = 3.$$

Pour $m = 6$, le polygone régulier est l'hexagone, et comme $R = 1$, on a :

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c_6 = 1.$$

Donc : $$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

puis : $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Pour $m = 4$, on a le carré : $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_4 = \sqrt{2}$,

et $$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{puis :} \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Pour $m = 3$, le polygone est le triangle équilatéral :

$$c_3 = \sqrt{3}; \qquad a_3 = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}; \qquad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Si l'on veut les fonctions circulaires des arcs supplémentaires, on applique les formules établies plus haut, ainsi :

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\dfrac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$$

Il est bon de bien connaître les résultats inscrits dans le tableau suivant :

arcs	degrés	0	30°	45°	60°	90°
	grades	0	$\frac{200}{6}$	50	$\frac{200}{3}$	100
	radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinus		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangentes		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotangentes		∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

EXERCICES

1. Démontrer l'identité :

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

2. Démontrer l'identité :

$$2(1 + \sin x)(1 + \cos x) = (1 + \sin x + \cos x)^2.$$

3. Démontrer l'identité :

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

4. Démontrer l'identité :

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 1 + \sin x \operatorname{cotg} x.$$

5. Démontrer l'identité :

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x - 1}.$$

6. Démontrer l'identité :

$$(1 + \operatorname{tg} x)\cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

7. Démontrer que l'expression :

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

est indépendante de x.

8. Démontrer que l'expression :

$$2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$$

est indépendante de x.

9. Démontrer que l'expression:

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

est indépendante de x.

10. Vérifier l'identité :

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$$

11. Vérifier l'identité :

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cotg}^2 y - 1.$$

12. Calculer les fonctions circulaires des arcs :

$$\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}.$$

CHAPITRE III

INVERSION DES FONCTIONS CIRCULAIRES

---

22. Le problème de l'inversion des fonctions circulaires se pose de la façon suivante : *trouver tous les arcs ayant une fonction circulaire donnée.* Nous le traiterons dans le cas du sinus, du cosinus et de la tangente; si l'on donne la cotangente, on est ramené de suite au dernier cas.

INVERSION DU SINUS

23. **Problème.** — ***Trouver tous les arcs ayant pour sinus un nombre donné p, c'est-à-dire vérifiant l'équation :***

$$\sin x = p. \qquad (1)$$

Un sinus étant compris entre -1 et 1, pour que le problème soit possible, il faut d'abord que p vérifie l'inégalité :

$$-1 \leqslant p \leqslant 1.$$

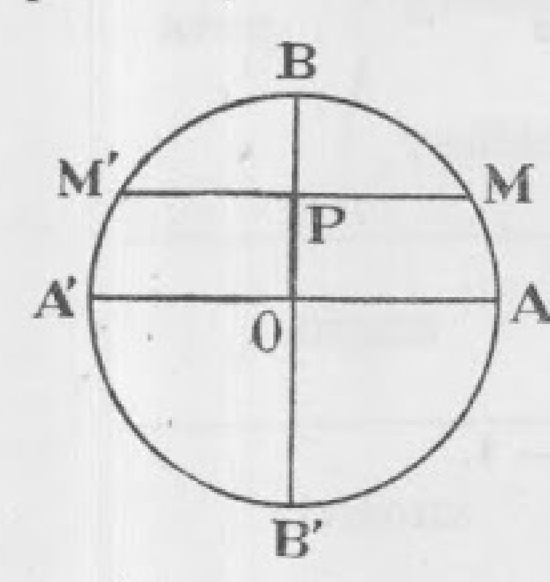


Fig. 14.

Supposons cette condition remplie et, sur l'axe des sinus du cercle trigonométrique, portons un vecteur OP ayant pour mesure :

$$\overline{\mathrm{OP}} = p.$$

Tous les arcs ayant p pour sinus sont terminés en l'un des deux points M et M' où la parallèle à l'axe des cosinus menée par P rencontre le cercle.

Soit α un des arcs terminés en M, tous les arcs terminés en M ont des valeurs de la forme :

$$x = \alpha + 2k\pi;$$

où k est un nombre entier quelconque.

Parmi les arcs terminés en M' nous savons que se trouve l'arc $\pi - \alpha$; tous les arcs terminés en M' ont donc des valeurs de la forme

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

Ainsi : ***l'équation*** $\sin x = p$ ***a une double infinité de solutions données par les formules :***

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi; \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi; \end{cases} \qquad (2)$$

dans lesquelles α ***est un des arcs ayant*** p ***pour sinus et où*** k ***est un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul.***

Les formules (2) se nomment les formules d'inversion pour le sinus.

On peut les interpréter de la façon suivante, puisque $\sin \alpha = p$, l'équation peut s'écrire : $\sin x = \sin \alpha$, et l'on voit que :

Si ***deux arcs*** x ***et*** α ***ont même sinus, l'un d'entre eux est donné en fonction de l'autre par l'une des deux relations :***

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi; \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi. \end{cases}$$

Cette remarque permet de ramener à des équations algébriques un grand nombre d'*équations trigonométriques*, c'est-à-dire d'équations dans lesquelles l'inconnue x entre par des fonctions circulaires, soit de x soit même d'une fonction de x.

Ainsi, soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions algébriques de la variable x, l'équation :

$$\sin f(x) = \sin g(x);$$

peut être remplacée par une des deux équations algébriques :

$$f(x) = g(x) + 2k\pi;$$
$$f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi,$$

où k est un nombre entier quelconque. On propose souvent des exemples où $f(x)$ et $g(x)$ sont du premier degré en x.

24. **Application.** — ***Résoudre l'équation :***

$$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Les deux arcs $5x + \frac{\pi}{4}$ et $2x + \frac{\pi}{3}$ ayant même sinus vérifient une des équations :

$$5x + \frac{\pi}{4} = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

ou : $$5x + \frac{\pi}{4} = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

dans lesquelles k est un nombre entier quelconque.

La première s'écrit :

$$3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

et donne :

$$x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}; \qquad (1)$$

la seconde s'écrit :

$$7x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi;$$

et donne :

$$x = \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \qquad (2)$$

25. On demande souvent combien les arcs x, solutions de l'équation, ont d'extrémités différentes sur le cercle trigonométrique.

Nous allons montrer, d'une façon générale, que les arcs x, donnés par l'égalité :

$$x = \alpha + \frac{2k\pi}{n},$$

ont n extrémités différentes, qui sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

Donnons d'abord à k les valeurs positives entières, à partir de 0; les arcs successifs obtenus :

$$\alpha,\ \alpha + \frac{2\pi}{n},\ \alpha + 2\cdot\frac{2\pi}{n},\ \alpha + 3\cdot\frac{2\pi}{n}\ldots.$$

sont les termes d'une progression arithmétique de raison $\frac{2\pi}{n}$; on obtiendra donc leurs extrémités en portant, à partir de celle de l'arc α des arcs consécutifs égaux à $\frac{2\pi}{n}$, qui sont précisément les arcs sous-tendus par les côtés du polygone régulier de n côtés, dont le premier sommet coïncide avec l'extrémité de l'arc α. Après n opérations, l'arc obtenu a pour valeur : $\alpha + \frac{2n\pi}{n} = \alpha + 2\pi$, et le polygone se ferme; on retrouve ensuite ses différents sommets. On les retrouve aussi en tournant à partir du premier dans le sens négatif, c'est-à-dire pour les valeurs négatives de k.

Dans notre exemple, les arcs (1) ont trois extrémités aux sommets d'un triangle équilatéral, les arcs (2), en ont sept aux sommets d'un polygone régulier de 7 côtés.

26. Equations trinômes en sin x. — On ramène à la résolution d'une équation du second degré et à l'inversion d'un sinus, la résolution d'une équation trinôme en $\sin x$, de la forme :

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0.$$

En posant $\sin x = y$, on obtient, pour déterminer y, l'équation :

$$ay^2 + by + c = 0;$$

si y' est une de ses racines, les arcs x, solutions de l'équation primitives, sont donnés par :

$$\sin x = y'.$$

Pour qu'ils existent, il faut que l'on ait :

$$-1 \leqslant y' \leqslant 1.$$

La discussion d'une équation trinôme en $\sin x$ revient donc à un problème du second degré, et, dans le cas le plus général, à toute racine de l'équation en y vérifiant les inégalités précédentes, correspondent deux séries d'arcs x donnés par les formules d'inversion.

INVERSION DU COSINUS

27. Problème. — ***Trouver tous les arcs ayant pour cosinus un nombre donné p, c'est-à-dire vérifiant l'équation :***

$$\cos x = p.$$

Il faut que l'on ait $-1 \leqslant p \leqslant 1$. Supposons cette condition remplie, et sur l'axe des cosinus du cercle trigonométrique, portons un vecteur $\overrightarrow{OP}$ ayant pour mesure $\overline{OP} = p$.

Nous avons ici supposé $p < 0$. Tous les arcs ayant p pour cosinus sont terminés en l'un des deux points M et M′ où la parallèle à l'axe des sinus menée par P rencontre le cercle trigonométrique; si α est un des arcs terminés en M, tous les arcs terminés en M ont pour valeurs :

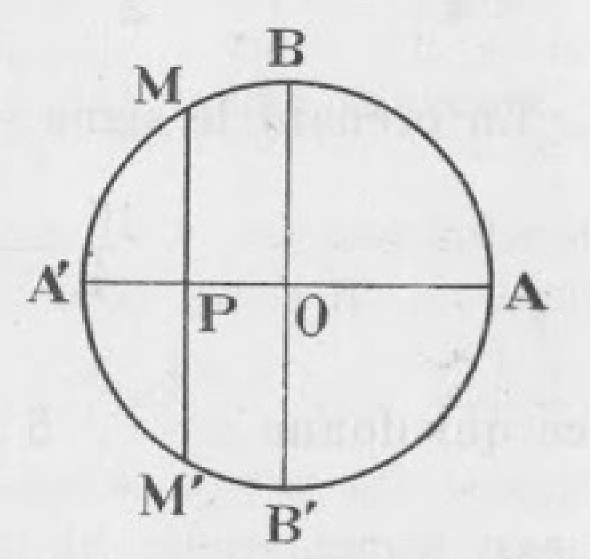


FIG. 15.

$$x = \alpha + 2k\pi;$$

parmi les arcs terminés en M′ se trouve l'arc $-\alpha$, et tous les arcs terminés en M′ ont pour valeurs :

$$x = -\alpha + 2k\pi.$$

On peut réunir les deux formules en une seule, et l'on voit que *l'équation* $\cos x = p$, *où* $-1 \leqslant p \leqslant 1$, *a une double infinité de solutions données par la formule :*

$$x = \pm\alpha + 2k\pi,$$

où α *est l'un d'entre eux et* k *un nombre entier quelconque.*

On peut dire aussi que : si *deux arcs* x *et* α *ont même cosinus, ils sont liés par la relation :*

$$x = \pm\alpha + 2k\pi.$$

Les applications sont du même genre que dans le cas de l'inversion du sinus.

28. Exemple. — *Résoudre l'équation :*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sin 3x.$$

L'équation peut s'écrire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

et donne :

$$\frac{\pi}{4} - 2x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi$$

En prenant le signe +, on a :

$$\frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi; \qquad \text{d'où :} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

En prenant le signe — :

$$\frac{\pi}{4} - 2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi;$$

ce qui donne : $\quad 5x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi; \qquad x = \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}.$

Ces derniers ont cinq extrémités aux sommets d'un pentagone régulier.

INVERSION DE LA TANGENTE

29. Problème. — *Trouver tous les arcs* x *vérifiant l'équation :*

$$\operatorname{tg} x = p, \tag{1}$$

où p *est un nombre algébrique donné.*

Une tangente pouvant prendre une valeur quelconque entre $-\infty$ et $+\infty$, p n'est assujetti à aucune condition. Supposons $p > 0$, et sur l'axe des tangentes portons, à partir de A, le vecteur $\overrightarrow{AT}$, mesuré par :

$$\overline{AT} = p.$$

Tous les arcs ayant p pour tangente sont terminés en une des extrémités du diamètre OT; l'équation (1) a donc une double infinité de solutions.

Si α est un des arcs terminés en M, $\pi + \alpha$ est un des arcs terminés en M′, et les solutions sont données par les deux formules :

$$x = \alpha + 2k\pi;$$

$$x = \alpha + \pi + 2k\pi = \alpha + (2k+1)\pi,$$

Fig. 16.

que l'on peut réunir en une seule :

$$x = \alpha + k\pi. \tag{2}$$

Ainsi : *l'équation* $\operatorname{tg} x = p$ *admet une infinité de solutions données par la formule :*

$$x = \alpha + k\pi,$$

dans laquelle α *est un des arcs ayant* p *pour tangente et* k *un nombre entier positif, négatif ou nul.*

On peut dire aussi que si deux arcs x et α ont même tangente, c'est-à-dire si :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha,$$

ces arcs sont liés par la relation (2).

30. Applications. — Les applications sont du même genre que celles données dans les problèmes précédents.

Exemple : *Résoudre l'équation :* tg 5 x . tg 3 x = 1.

On écrit :
$$\text{tg } 5x = \frac{1}{\text{tg } 3x} = \text{cotg } 3x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$
et l'on a :
$$5x = \frac{\pi}{2} - 3x + k\pi; \qquad \text{d'où :} \quad 8x = \frac{\pi}{2} + k\pi;$$
$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8} = \frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{16}.$$

Il y a 16 extrémités pour les solutions, aux sommets d'un polygone régulier de 16 côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Une équation trinôme en tg x se ramène à la résolution d'une équation du second degré et à l'inversion d'une tangente.

Exemple :

Résoudre l'équation : $\text{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\,\text{tg } x + \sqrt{3} = 0.$

Posons tg $x = t$; l'équation :
$$t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0;$$
a deux racines : $t' = 1$, $t'' = \sqrt{3}$, et les arcs x sont donnés par les deux équations :
$$\text{tg } x = 1; \qquad \text{tg } x = \sqrt{3};$$
d'où l'on déduit :
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi; \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$
puisque :
$$1 = \text{tg } \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} = \text{tg } \frac{\pi}{3}$$

31. Remarque relative à tout ce qui précède.

Dans tout ce qui précède, il a été question d'arcs; mais tous les résultats obtenus s'appliquent aussi bien aux angles, qui ont mêmes mesures que les arcs qu'ils interceptent sur le cercle trigonométrique ayant pour centre leur sommet. Dans les applications, ce sont surtout des angles qui interviennent, en particulier en géométrie et en mécanique.

A ce propos, il n'est pas inutile d'observer que les angles qui interviennent en géométrie sont, en général, inférieurs à π. Il faut alors, si on applique les formules d'inversion, ne conserver que les solutions comprises entre 0 et π.

Si un angle compris entre 0 et π est déterminé par une équation qui donne son sinus, il faut que l'équation ait au moins une racine

comprise entre 0 et 1, et à cette racine correspondent deux angles supplémentaires. S'il est déterminé par une équation en cos x, il faut qu'elle ait au moins une racine comprise entre − 1 et + 1, et s'il est déterminé par sa tangente, que l'équation ait des racines. Dans ces deux derniers cas, à une racine convenable, correspond un seul angle entre 0 et π. Si l'angle est aigu, le cosinus doit être compris entre 0 et 1 et la tangente doit être positive.

EXERCICES

13. Résoudre l'équation :
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

14. Résoudre l'équation :
$$\sin 3x = \cos 5x.$$

15. Résoudre l'équation :
$$\text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\text{cotg}(5x - \pi) = 1.$$

16. Résoudre l'équation :
$$\text{tg } \pi(2x + 1) - \text{tg } \pi(x + 1) = 0.$$

17. Résoudre l'équation :
$$4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

18. Résoudre l'équation
$$\sqrt{3}\,\text{tg}^2 x - 4\,\text{tg } x + \sqrt{3} = 0.$$

19. Résoudre l'équation :
$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

20. Résoudre l'équation :
$$\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0.$$

21. Résoudre l'équation :
$$\text{tg}^4 x - 4\,tg^2 x + 3 = 0.$$

22. Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre des solutions de l'équation :
$$4\sin^2 x + (1 - m)\sin x + 1 = 0,$$
où x désigne un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE IV

PROJECTIONS

32. Nous établirons maintenant quelques propositions relatives aux projections que nous utiliserons pour démontrer les formules fondamentales de la trigonométrie.

Etant donné un axe X'X et un plan P non parallèle à cet axe, on appelle *projection d'un point* A *sur l'axe* X'X, *parallèlement au plan* P, *la trace* A' *sur l'axe* X'X *du plan parallèle au plan* P *passant par* A.

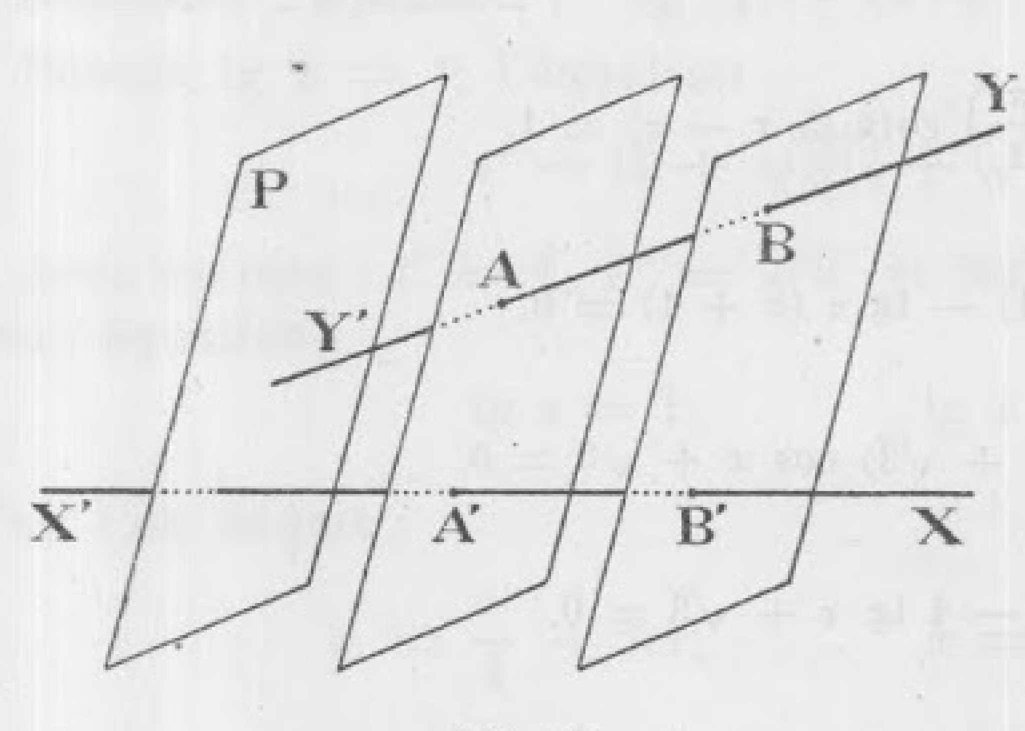


Fig. 17.

Si le plan P est perpendiculaire à l'axe X'X, on dit que A' est la *projection orthogonale* de A sur l'axe X'X. Les plans parallèles au plan P se nomment des plans projetants.

Soit $\vec{AB}$ un vecteur porté par un axe Y'Y; le vecteur $\vec{A'B'}$ déterminé par les projections des points A et B sur l'axe X'X se nomme la projection du vecteur $\vec{AB}$ sur cet axe.

Soit $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, deux vecteurs portés par un axe Y'Y, $\vec{A'B'}$, $\vec{C'D'}$, leurs projections sur l'axe X'X; le théorème de Thalès appliqué aux quatre plans projetants et aux sécantes X'X et Y'Y, donne, dans tous les cas, entre les nombres algébriques qui

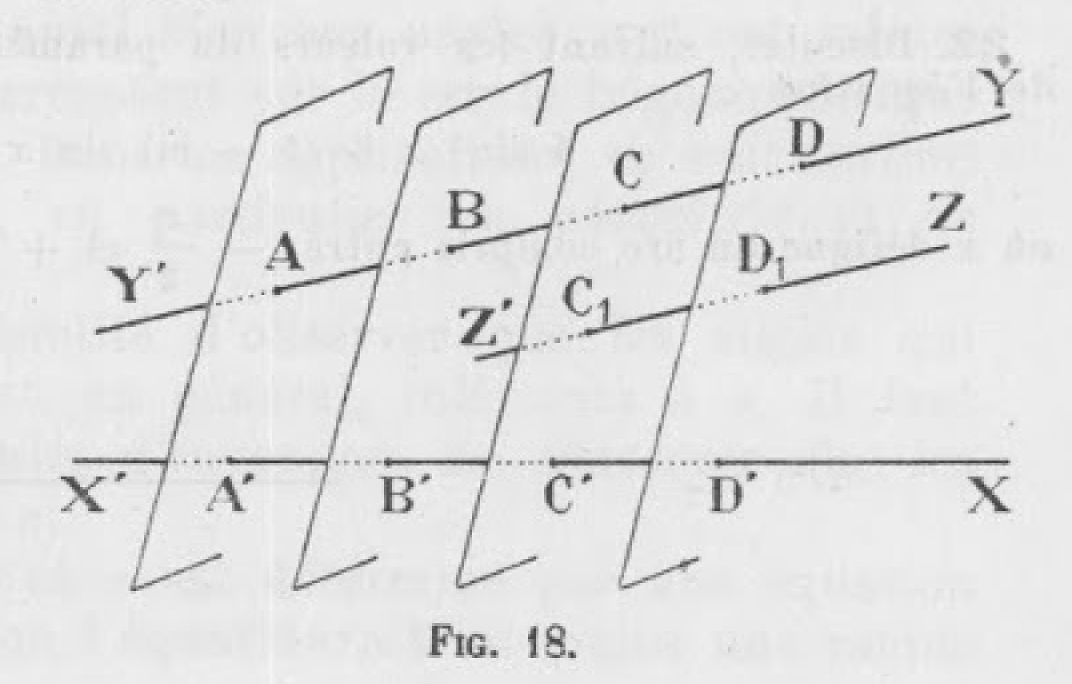


Fig. 18.

mesurent les vecteurs sur les axes qui les portent, la relation

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

En particulier, si les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont équipollents, $\overline{AB} = \overline{CD}$, et la relation précédente donne :

$$\overline{A'B'} = \overline{C'D'}.$$

Les projections de deux vecteurs équipollents portés par un même axe ont des mesures algébriques égales.

33. Soit maintenant deux vecteurs équipollents $\vec{AB}$ et $\vec{C_1D_1}$ portés par deux axes parallèles Y'Y, Z'Z; les plans projetants C_1 et D_1 rencontrent l'axe Y'Y en C et D, et les deux vecteurs $\vec{C_1D_1}$ et $\vec{CD}$ sont équipollents : ils ont même projection $\vec{C'D'}$. Les mesures algébriques des projections de deux vecteurs équipollents sur un même axe sont égales.

Il résulte de là que pour calculer le nombre algébrique qui mesure la projection d'un vecteur sur un axe, on peut déplacer ce vecteur d'une façon quelconque dans l'espace à condition qu'il reste équipollent à lui-même.

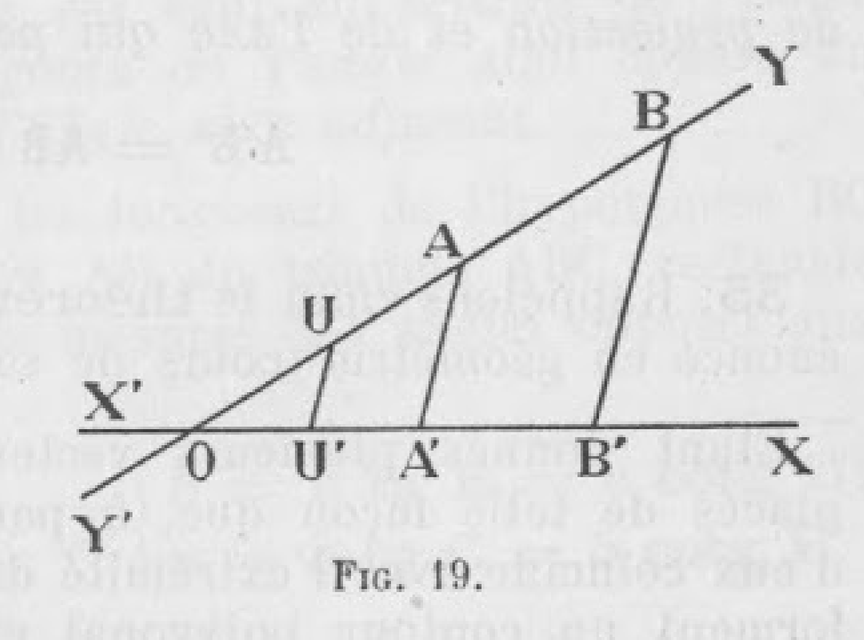


Fig. 19.

Transportons l'axe Y'Y, qui porte un vecteur $\vec{AB}$ parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il coupe l'axe de projection X'X en O, et soit $\vec{OU}$ le vecteur mesuré par + 1, porté par Y'Y. Ce vecteur se nomme le segment directeur de l'axe Y'Y. Soit U', A', B', les projections des points U, A, B; la relation écrite au début donne :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OU'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OU}} = \overline{AB}; \qquad \text{puisque } \overline{OU} = +1;$$

d'où l'on déduit :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \overline{OU'}.$$

Le nombre algébrique qui mesure la projection d'un vecteur sur un axe est égal au produit du nombre algébrique qui mesure ce vecteur, sur l'axe qui le porte, par le nombre algébrique qui mesure la projection du segment directeur de l'axe qui porte le vecteur.

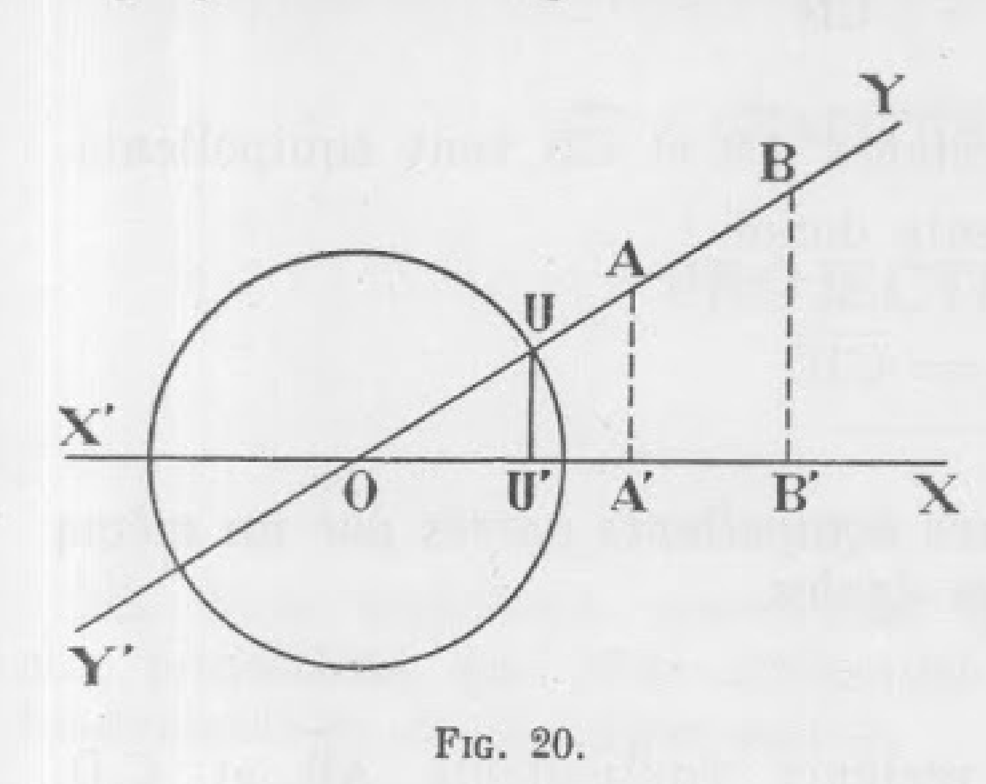


Fig. 20.

Dans le cas où l'on fait des projections orthogonales, les droites UU', AA', BB', sont perpendiculaires sur X'X, et si l'on considère le cercle trigonométrique de centre O ayant pour axe des cosinus l'axe X'X, on a, par définition :

$$\overline{\mathrm{OU'}} = \cos(\mathrm{OY}, \mathrm{OX});$$

(OY, OX) désignant l'un quelconque des angles que font les deux directions OX et OY, et nous obtenons l'énoncé suivant :

34. *La mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe est égale au produit de la mesure algébrique du vecteur par le cosinus de l'angle des directions positives de l'axe de projection et de l'axe qui porte le vecteur :*

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{AB}} \cos(\mathrm{OY}, \mathrm{OX}).$$

35. Rappelons enfin le **théorème des projections** que nous avons énoncé en géométrie (cours de seconde, nos 197, 198).

Etant donnés plusieurs vecteurs consécutifs, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, placés de telle façon que, à partir du second, l'origine de chacun d'eux coïncide avec l'extrémité du précédent, on dit que ces vecteurs forment un contour polygonal et on appelle résultante du contour le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, qui a pour origine l'origine du premier vecteur du contour et pour extrémité celle du dernier. Les différents vecteurs se nomment les vecteurs composants du contour.

Théorème des projections.

Le nombre algébrique qui mesure la projection sur un axe de la résultante d'un contour polygonal est égal à la somme algébrique des nombres qui mesurent les projections des vecteurs composants.

En effet, si A', B', C', D', E', sont les projections des sommets du contour sur un axe quelconque X'X, le théorème de Chasles donne :

$$\overline{\mathrm{A'E'}} = \overline{\mathrm{A'B'}} + \overline{\mathrm{B'C'}} + \overline{\mathrm{C'D'}} + \overline{\mathrm{D'E'}}.$$

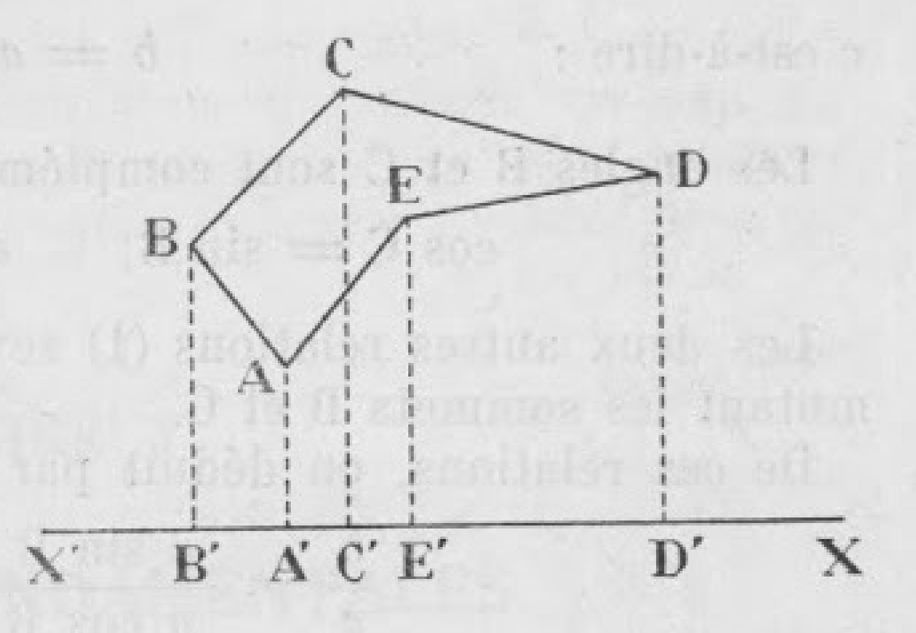


Fig. 21.

Comme première application de ce qui précède, nous établirons les relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle que l'on utilise constamment.

RELATIONS ENTRE LES COTES ET LES ANGLES D'UN TRIANGLE RECTANGLE

36. *Dans un triangle rectangle :*

1° *Chaque côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle aigu adjacent au côté ou par le sinus de l'angle aigu opposé.*

2° *Chaque côté de l'angle droit est égal au produit de l'autre côté de l'angle droit par la tangente de l'angle aigu opposé au premier ou par la cotangente de l'angle aigu adjacent.*

Autrement dit, si a, b, c, sont les longueurs de l'hypoténuse BC et des côtés de l'angle droit AC et AB du triangle ABC, rectangle en A, si l'on désigne par B et C les mesures des angles opposés aux côtés b et c, on a :

$$(1)\begin{cases} b = a \cos \mathrm{C} = a \sin \mathrm{B}; \\ c = a \cos \mathrm{B} = a \sin \mathrm{C}; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} b = c \operatorname{tg} \mathrm{B} = c \operatorname{cotg} \mathrm{C}; \\ c = b \operatorname{tg} \mathrm{C} = b \operatorname{cotg} \mathrm{B}. \end{cases}$$

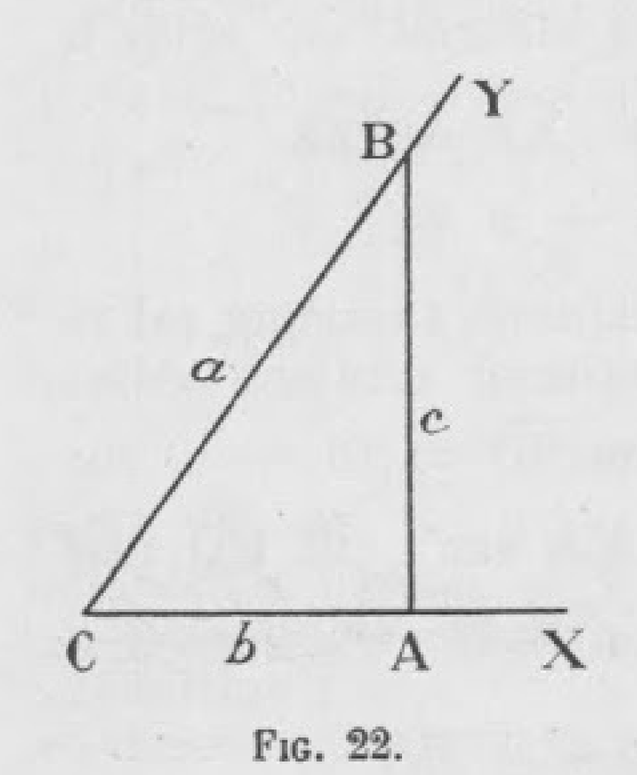


Fig. 22.

Nous établirons la relation $b = a \cos \mathrm{C}$; toutes les autres s'en déduiront facilement.

Considérons les deux axes CX et CY, dirigés positivement de C vers A et de C vers B; les deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ sont de sens positifs, et :

$$\overline{\mathrm{CA}} = b; \qquad \overline{\mathrm{CB}} = a;$$

le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ étant la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ sur l'axe CX, on a :

$$\overline{\mathrm{CA}} = \overline{\mathrm{CB}} \cos(\mathrm{CY}, \mathrm{CX}),$$

c'est-à-dire : $b = a \cos C$.

Les angles B et C sont complémentaires :

$\cos C = \sin B$; et : $b = a \sin B$.

Les deux autres relations (1) se déduisent des précédentes en permutant les sommets B et C.

De ces relations, on déduit par division :

$$\frac{b}{c} = \frac{a \sin B}{a \cos B} = \frac{a \cos C}{a \sin C};$$

c'est-à-dire : $b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C$;

on démontre de même les autres relations (2).

37. Application. — On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$; soit M un point du demi-cercle, P sa projection sur le diamètre AB; on pose : $\widehat{BAM} = x$; calculer en fonction de R et de x les longueurs : AM, MB, MP, AP, PB.

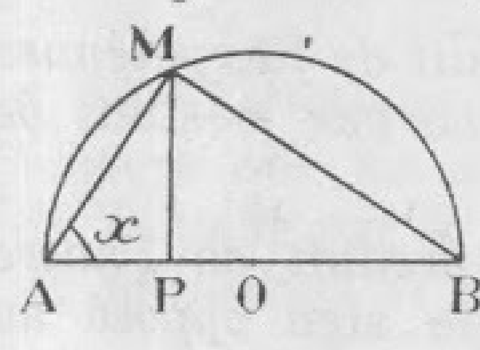


Fig. 23.

Le triangle AMB, rectangle en M, donne :

$$AM = AB \cos x = 2R \cos x;$$
$$MB = AB \sin x = 2R \sin x.$$

Le triangle APM, rectangle en P, donne ensuite :

$$AP = AM \cos x = 2R \cos^2 x;$$
$$PM = AM \sin x = 2R \sin x \cos x.$$

Enfin, le triangle PMB, où l'angle en M est égal à x, donne :

$$PB = MB \sin x = 2R \sin^2 x.$$

On pouvait aussi écrire :

$$PB = AB - AP = 2R - 2R \cos^2 x = 2R(1 - \cos^2 x)$$
$$= 2R \sin^2 x.$$

CHAPITRE V

FORMULES FONDAMENTALES

Nous allons, dans ce qui suit, établir des formules très importantes que l'on utilise constamment.

I. FORMULES D'ADDITION

38. On appelle **formules d'addition** des formules qui donnent les fonctions circulaires de la somme ou de la différence de deux arcs en fonctions de celles de ces deux arcs.

Nous commencerons par établir la formule qui donne $\cos(a + b)$.

Soit A_1 l'extrémité de l'arc a d'origine A sur le cercle trigonométrique; prenons le point A_1 pour nouvelle origine, le diamètre $A_1'A_1$ comme axe des cosinus, et conservons le même sens positif sur le cercle, de sorte que le nouvel axe des sinus $B_1'B_1$, sera tel que l'arc A_1B_1, soit égal à $+\frac{\pi}{2}$.

Soit M l'extrémité de l'arc b d'origine A_1; d'après une formule établie au début, on a :

$$\widehat{AM} = \widehat{AA_1} + \widehat{A_1M} + 2k\pi$$
$$= a + b + 2k\pi;$$

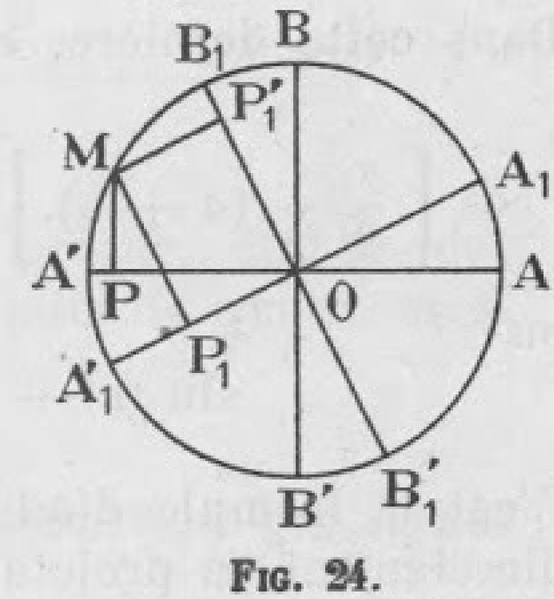


Fig. 24.

et les fonctions circulaires de l'arc $a + b$ sont celles des arcs terminés en M; en particulier $\cos(a + b) = \overline{OP}$ est la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe A'A.

Menons MP_1 et MP_1', perpendiculaires sur $A_1'A_1$ et sur $B_1'B_1$. Par définition :

$$\overline{OP_1} = \cos b; \qquad \overline{OP_1'} = \overline{P_1M} = \sin b.$$

Or, $\overrightarrow{OM}$ est la résultante du contour formé par $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{P_1M}$, et le théorème des projections donne, sur un axe quelconque :

$$\text{Projection } \overrightarrow{OM} = \text{Projection } \overrightarrow{OP_1} + \text{Projection } \overrightarrow{OP_1}'. \quad (1)$$

Projetons sur l'axe A'A. Nous avons :

$$\text{Projection de } \overrightarrow{OM} = \cos(a+b);$$

$$\text{Projection de } \overrightarrow{OP_1} = OP_1 \cos(OA_1, OA) = \cos b \cos a;$$

$$\text{Projection de } \overrightarrow{OP_1}' = OP_1' \cos(OB_1, OA) = \sin b \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin b \sin a;$$

et l'égalité (1) devient :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (2)$$

C'est la formule d'additions pour le cosinus.

39. Cette relation est une ***identité :*** elle est vraie quels que soient les arcs a et b, car nous n'avons fait aucune hypothèse relativement à ces arcs.

Remplaçons dans la formule b par $-b$; elle devient :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$

c'est-à-dire :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (3)$$

Dans cette dernière, remplaçons a par $\frac{\pi}{2} - a$; elle donne :

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

ou :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

C'est la formule d'addition pour le sinus, que l'on pourrait établir directement en projetant le contour OP_1M sur l'axe B'B.

40. Enfin, si on y remplace b par $-b$, il vient :

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Les formules d'addition pour les tangentes se déduisent des précédentes :

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b};$$

et, en divisant par $\cos a \cos b$ les deux termes de la fraction :

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a}{\cos a}\cdot\dfrac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{ tg } b};$$

et en remplaçant b par $-b$:

$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{ tg } b}.$$

Nous réunissons, dans le tableau qui suit, les six formules d'addition qu'il est nécessaire de savoir très bien :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a;$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a;$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$$
$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{ tg } b},$$
$$\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{ tg } b}.$$

41. On pourrait, maintenant, de proche en proche, établir des formules pour des sommes algébriques de trois, puis de quatre arcs. Donnons un exemple :

Problème. — ***Calculer* $\sin(a+b+c)$, *en fonction des lignes trigonométriques de* a, b, c.**

On écrit :

$$\sin(a+b+c) = \sin[(a+b)+c]$$
$$= \sin(a+b)\cos c + \sin c \cos(a+b);$$

et, en remplaçant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ par leurs valeurs :

$$\sin(a+b+c) =$$

$$(\sin a \cos b + \sin b \cos a) \cos c + \sin c (\cos a \cos b - \sin a \sin b);$$

c'est-à-dire :

$$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c +$$
$$\sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c.$$

Tous les autres problèmes du même genre se traiteront de la même façon.

II. FORMULES DE MULTIPLICATION PAR 2

42. Le problème de la multiplication des arcs se pose de la façon suivante : m étant un nombre entier positif, calculer $\sin mx$, $\cos mx$, $\operatorname{tg} mx$, en fonction des lignes trigonométriques de l'arc x.

Nous avons à traiter le problème seulement pour $m = 2$.

43. Multiplication par 2. — On obtient, de suite, les formules de multiplication par 2, en faisant $b = a$ dans les formules d'addition, qui deviennent :

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a;$$

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a;$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

La formule qui donne $\cos 2a$ est susceptible d'être mise sous d'autres formes très utiles. Remplaçons-y $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, puis $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$; elle devient :

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a;$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1;$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a,$$

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a.$$

Nous réunissons dans le tableau qui suit les formules de multiplication par 2, qu'il est nécessaire de très bien connaître :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a;$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a;$$
$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a;$$
$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1;$$
$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a;$$
$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a;$$
$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

44. Il ne faut pas oublier que ces relations sont des identités; elles ont lieu quel que soit l'arc a. Par exemple, on peut très bien écrire :

$$\sin(a+b) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2};$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1;$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{3x}{2}}; \text{ etc.}$$

Nous verrons, dans la suite, des applications de ces sortes de transformations qu'il faut s'entraîner à faire sans difficulté.

En combinant les formules d'addition et de multiplication par 2, on établit facilement celles de multiplication par 3.

45. Calculons sin 3 x.

Nous écrivons :

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x;$$

remplaçons $\sin 2x$ et $\cos 2x$ par leurs valeurs; il vient :

$$\sin 3x = 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x);$$

$$\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x.$$

Si nous voulons calculer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ seulement, remplaçons $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$; nous obtenons :

$$\sin 3x = 3 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Si nous voulons $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ seulement, nous écrivons :

$$\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - 1) = \sin x [4 \cos^2 x - 1];$$

et :

$$\sin 3x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}\, [4 \cos^2 x - 1].$$

On voit que l'on obtient une seule valeur pour $\sin 3x$, en fonction de $\sin x$, et deux valeurs opposées en fonction de $\cos x$. Il n'est pas difficile de démontrer qu'il doit bien en être ainsi.

Supposons que l'on donne : $\sin x = \sin \alpha$, tous les arcs x ont pour valeurs :

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi;$$

et les arcs $3x$:

$$3x = 3\alpha + 6k\pi;$$

$$3x = 3\pi - 3\alpha + 6k\pi = \pi - 3\alpha + 2(3k + 1)\pi;$$

et ont mêmes extrémités que les arcs 3α et $\pi - 3\alpha$ et, par suite, un seul sinus : $\sin 3\alpha$.

Si, au contraire, on donne : $\cos x = \cos \alpha$, les arcs x ont pour valeurs :

$$x = \pm \alpha + 2k\pi;$$

et les arcs $3x$:

$$3x = \pm 3\alpha + 6k\pi.$$

Ils ont mêmes fonctions circulaires que l'un des arcs $\pm 3\alpha$ et, par suite, deux sinus opposés, $\pm \sin 3\alpha$.

46. On opérerait d'une façon analogue pour calculer $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 3x$; puis, de proche en proche, on pourrait calculer les fonctions circulaires des arcs $4x$, $5x$, $6x$, ..., etc.

Il existe des formules générales que nous ne pouvons pas établir ici et qui donnent $\sin mx$, $\cos mx$, $\operatorname{tg} mx$.

Pour $\cos 3x$ et $\operatorname{tg} 3x$, on trouvera :

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

47. Théorème. — *Toutes les fonctions circulaires d'un arc x s'expriment rationnellement en fonction de* $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Il n'est pas difficile de prévoir qu'il doit bien en être ainsi, car si l'on donne :

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \alpha,$$

tous les arcs $\frac{x}{2}$ ont pour valeurs : $\frac{x}{2} = \alpha + k\pi$;

et les arcs x : $x = 2\alpha + 2k\pi$.

Ils ont une seule extrémité sur le cercle trigonométrique, donc un seul sinus, un seul cosinus, une seule tangente, dont les valeurs ne peuvent pas contenir de radical et, par suite, pas de double signe.

Pour obtenir leurs expressions en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, nous partirons des formules de multiplication par 2 pour le sinus et le cosinus :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a; \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a;$$

dans lesquelles nous ferons $a = \frac{x}{2}$, et aux relations obtenues nous adjoindrons la relation : $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Nous obtenons :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}; \tag{1}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}; \tag{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}. \tag{3}$$

Divisons membres à membres d'abord les égalités (1) et (3), puis les égalités (2) et (3); il vient :

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Il suffit de diviser par $\cos^2 \frac{x}{2}$ les deux termes de chaque fraction et de remplacer :

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \quad \text{par} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

pour obtenir :

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

et, par division :

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Cette dernière formule peut d'ailleurs être obtenue de suite en remplaçant a par $\frac{x}{2}$ dans la valeur de $\operatorname{tg} 2a$.

Ainsi, si l'on pose $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, les fonctions circulaires de l'arc x sont données par les formules :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{cotg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

qu'il faut très bien savoir.

48. Ces formules sont très importantes; pour s'en rendre compte il suffit de remarquer qu'elles permettent de ramener à des problèmes algébriques l'étude de toute fonction ou de toute équation dépendant des fonctions circulaires d'un arc x : elles dépendent de la variable algébrique t seulement.

Nous en verrons dans la suite une application.

EXERCICES

23. Calculer les fonctions circulaires de la somme $a + b + c$ de trois arcs. En déduire celles de l'arc $3x$.

24. Démontrer que si A, B, C sont les angles d'un triangle, on a :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C.$$

25. Démontrer l'identité :

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}.$$

26. Démontrer l'identité :

$$\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x = \cos^3 2x.$$

27. Soit x et y deux arcs, tels que :

$$x + y = a.$$

Démontrer que :

$$\sin^2 a = \cos^2 x + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y \cos a.$$

28. Démontrer que si

$$a + b + c = \pi,$$

on a :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

29. Démontrer que si :

$$a + b + c = 2\pi;$$

on a :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

30. a et b étant deux arcs quelconques, démontrer l'identité :

$$\sin^2 (a - b) \sin^2 b + 2 \sin (a - b) \sin b \cos a = \sin^2 a.$$ faux

31. Calculer $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ et $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ en partant des valeurs de $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

CHAPITRE VI

FORMULES DE TRANSFORMATION

---

49. Dans les applications pratiques les fonctions circulaires sont connues par leurs logarithmes. Nous savons qu'une expression ne peut être calculée à l'aide des logarithmes que si les seules opérations qu'il faut effectuer sont des produits, des puissances, des quotients ou des racines. Rendre une expression calculable par logarithmes, c'est la transformer de façon qu'elle ne contienne que les opérations précédentes. Les formules que nous allons établir permettent d'y parvenir dans un grand nombre de cas.

FORMULES DE TRANSFORMATION DES SOMMES EN PRODUITS

50. Problème. — *Rendre calculables par logarithmes des expressions de la forme :*

$$\sin p \pm \sin q; \qquad \cos p \pm \cos q; \qquad \operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q.$$

Ecrivons les formules d'addition :

$$(1) \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a; \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a; \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin b \sin a. \end{cases}$$

Ajoutons puis retranchons membres à membres d'abord les deux égalités (1), puis les deux égalités (2); nous obtenons :

$$(I) \begin{cases} \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b; \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a; \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b; \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b. \end{cases}$$

Posons : $a + b = p; \qquad a - b = q;$

nous en déduisons :

$$a = \frac{p+q}{2}; \qquad b = \frac{p-q}{2}.$$

En remplaçant dans les relations (I), nous obtenons les formules de transformation pour des sommes ou des différences de sinus ou de cosinus :

$$(II) \quad \begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2} \end{aligned}$$

Il est nécessaire de savoir très bien ces quatre formules que l'on utilise très souvent.

51. Pour les tangentes, il suffit d'écrire :

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q \pm \sin q \cos p}{\cos p \cos q},$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}.$$

On obtiendrait d'une façon analogue :

$$\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}.$$

52. **Problème inverse.** — Dans certains cas, on est conduit à transformer des produits de sinus ou de cosinus en sommes. Le problème est résolu par les formules (I) mises sous la forme :

$$(III) \quad \begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \sin b \cos a &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \end{aligned}$$

53. Exemples et applications.

I. *Transformer en produit* **sin p + cos q.**

Il suffit d'écrire :

$$\sin p + \cos q = \sin p + \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right),$$

ou bien :

$$\sin p + \cos q = \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right) + \cos q,$$

et d'appliquer une des formules (I). Par exemple :

$$\sin p + \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right) = 2\sin\frac{p + \frac{\pi}{2} - q}{2}\cos\frac{p - \frac{\pi}{2} + q}{2};$$

ce qui donne :

$$\sin p + \cos q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

54. II. *Transformer en produits :* 1 + cos x, 1 — cos x, 1 + sin x, 1 — cos x.

Pour les deux premières expressions, il suffit de remarquer que :

$$1 = \cos 0;$$

et l'on a :

$$1 + \cos x = \cos 0 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2},$$

$$1 - \cos x = \cos 0 - \cos x = -2\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{-x}{2}\right) = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

On retrouve des relations établies à propos de la multiplication par 2.

Pour les deux autres expressions, on pose :

$$1 = \sin\frac{\pi}{2}:$$

et l'on a :

$$1 + \sin x = \sin\frac{\pi}{2} + \sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right);$$

$$1 - \sin x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

55. III. *Transformer en produit la somme :*

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

Transformons la somme des deux premiers sinus :

$$\sin x + \sin 2x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

et écrivons :

$$\sin 3x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2};$$

d'après la formule de multiplication par 2, nous avons :

$$S = 2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right).$$

Transformons en produit la somme des deux cosinus :

$$\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 2\cos x\cos\frac{x}{2};$$

et nous obtenons :

$$S = 4\sin\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}.$$

On traiterait de la même façon des sommes de la forme :

$$S = \pm\sin x \pm \sin 2x \pm \sin 3x.$$

56. Remarque.

— Si on demandait de résoudre l'équation :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0,$$

elle se ramènerait à

$$\sin\frac{3x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2} = 0$$

et se décomposerait en :

$$\sin\frac{3x}{2} = 0; \quad \cos x = 0; \quad \cos\frac{x}{2} = 0,$$

qui se résolvent de suite en faisant l'inversion des fonctions circulaires.

57. IV. *Résoudre l'équation :*

$$\sin 7x + \sin 3x = \sin 6x + \sin 4x.$$

Transformons en produits les deux membres de l'équation :

$$2 \sin 5x \cos 2x = 2 \sin 5x \cos x;$$

$\sin 5x$ est en facteur; l'équation se décompose en :

$$\sin 5x = 0; \qquad \cos 2x = \cos x.$$

La première donne :

$$5x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad 5x = \pi + 2k\pi,$$

c'est-à-dire : $5x = k\pi$; d'où : $x = \dfrac{k\pi}{5}$.

La seconde donne :

$$2x = \pm x + 2k\pi;$$

d'où : $x = 2k\pi$; ou bien : $x = \dfrac{2k\pi}{3}$.

On traitera de la même façon les équations :

$$\sin ax \pm \sin bx = \sin a'x \pm \sin b'x;$$

$$\cos ax \pm \cos bx = \cos a'x \pm \cos b'x,$$

à condition que l'on ait : $a \pm b = a' \pm b'$, les signes se correspondant.

58. V. *Transformer en produit la somme :*

$$S = \sin a + \sin b + \sin c - \sin (a + b + c).$$

Transformons la somme des deux premiers sinus :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

puis la différence des deux derniers :

$$\sin c - \sin (a + b + c)$$

$$= 2 \sin \frac{c - a - b - c}{2} \cos \frac{c + a + b + c}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\sin c - \sin (a + b + c) = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b+2c}{2}.$$

Nous avons donc :

$$S = 2 \sin \frac{a+b}{2} \left[\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b+2c}{2} \right].$$

Transformons la différence des deux cosinus :

$$\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b+2c}{2} = -2 \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{-b-c}{2} =$$

$$2 \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2};$$

et nous obtenons :

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin (a + b + c)$$

$$= 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}.$$

59. Remarque. — Si a, b, c, sont les angles d'un triangle, $a + b + c = \pi$, et :

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}, \qquad \frac{a+c}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{b}{2}, \qquad \frac{b+c}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2};$$

et la relation précédente devient :

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$$

que l'on peut établir directement de la façon suivante :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\sin c = \sin (a + b) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

en ajoutant :

$$\sin a + \sin b + \sin c = 2 \sin \frac{a+b}{2} \left[\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{a-b}{2} \right] =$$

$$2 \cos \frac{c}{2} \left[\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{a-b}{2} \right];$$

enfin : $$\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2}=2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2};$$

et :

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$$

60. On traitera d'une façon analogue la transformation de :

$$S=\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c).$$

On trouvera :

$$S=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{b+c}{2};$$

et dans le cas où $a+b+c=\pi$, on obtient :

$$\cos a+\cos b+\cos c-1=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

EMPLOI D'UN ANGLE AUXILIAIRE

61. On ne peut pas toujours rendre une expression calculable par logarithmes en utilisant les formules de transformation; on utilise alors un angle auxiliaire comme nous allons l'expliquer sur des exemples.

62. I. ***a et b étant deux nombres positifs, a > b, dont on connaît les logarithmes, calculer* log (a + b) *et* log (a — b), *sans calculer a et b.***

On écrit : $$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right),\qquad a-b=a\left(1-\frac{b}{a}\right);$$

puis on détermine un angle φ par l'égalité :

$$\cos\varphi=\frac{b}{a},$$

qui donne :

$$\log\cos\varphi=\log b+\operatorname{colog} a.$$

On a ensuite :

$$a+b=a(1+\cos\varphi)=2a\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

$$a-b=a(1-\cos\varphi)=2a\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Formules calculables par logarithmes :

$$\log(a+b)=\log 2+\log a+2\log\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\log(a-b)=\log 2+\log a+2\log\sin\frac{\varphi}{2}.$$

63. II. ***a et b étant des nombres positifs dont on connaît les logarithmes, rendre calculable par logarithmes :***

$$\frac{a+b}{a-b}.$$

Il suffit d'écrire :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b}{a}}.$$

On détermine un angle φ par l'égalité :

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},\qquad \log\operatorname{tg}\varphi=\log b+\operatorname{colog} a;$$

et l'on a :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}45^\circ}=\operatorname{tg}(45^\circ+\varphi).$$

64. III. ***Rendre calculable par logarithmes :***

$$x=\sqrt{a^2+b^2}.\qquad a>b>0.$$

On écrit :

$$x=a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}};\qquad \text{et on pose :}\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a};$$

alors : $$x=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{a}{\cos\varphi}.$$

65. IV. ***Rendre calculable par logarithmes l'expression :***

$$y=a\cos x+b\sin x;$$

$a>0$, $b>0$.

On écrit : $$y=a\left[\cos x+\frac{b}{a}\sin x\right],$$

et on détermine l'angle φ par l'égalité :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

On a alors :

$$y = a \left[\cos x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x \right] = \frac{a (\cos x \cos \varphi + \sin \varphi \sin x)}{\cos \varphi},$$

c'est-à-dire :
$$y = \frac{a \cos (x - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

L'étude de la variation de la fonction y est ainsi ramenée à l'étude de $\cos (x - \varphi)$.

66. V. ***Rendre calculables par logarithmes les racines d'une équation du second degré.***

Nous supposerons que l'équation a des racines, et nous distinguerons plusieurs cas suivant les signes de ces racines.

1° *Les deux racines sont positives.*

L'équation est de la forme :

$$x^2 - px + q = 0;$$

ou $p > 0$, $q > 0$, après que l'on a divisé par le premier coefficient.

La formule de résolution donne :

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

et en mettant $\frac{p}{2}$ en facteur :

$$x = \frac{p}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} \right].$$

Le discriminant étant positif, on a : $\frac{4q}{p^2} < 1$, et l'on peut déterminer un angle φ tel que :

$$\sin^2 \varphi = \frac{4q}{p^2}.$$

On a alors :

$$\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \cos \varphi;$$

et les deux racines ont pour valeurs :

$$x' = \frac{p}{2} (1 + \cos \varphi) = p \cos^2 \frac{\varphi}{2};$$

$$x'' = \frac{p}{2} (1 - \cos \varphi) = p \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

formules calculables par logarithmes.

2° *Les deux racines sont négatives*

On forme l'équation qui admet comme racines $-x'$ et $-x''$, on la résoudra comme précédemment et on aura les valeurs absolues des racines.

3° *Les deux racines sont de signes contraires.*

On peut toujours supposer que la plus grande en valeur absolue est positive; sinon, on formerait l'équation en $-x$.

L'équation est alors de la forme :

$$x^2 - px - q = 0,$$

avec $p > 0$, $q > 0$. La formule de résolution s'écrit :

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = \frac{p}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}} \right].$$

On détermine un angle φ tel que :

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{4q}{p^2},$$

et l'on a :

$$x = \frac{p}{2} [1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}] = \frac{p}{2} \left[1 \pm \frac{1}{\cos \varphi} \right],$$

c'est-à-dire :
$$x = \frac{p}{2} \left[\frac{\cos \varphi \pm 1}{\cos \varphi} \right],$$

et les deux racines sont :

$$x' = \frac{p}{2} \cdot \frac{\cos \varphi + 1}{\cos \varphi} = \frac{p \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi},$$

$$x'' = \frac{p}{2} \frac{\cos \varphi - 1}{\cos \varphi} = -\frac{p \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Formules calculables par logarithmes.

EXERCICES

32. Démontrer que l'expression :

$$\cos^2 (a + x) + \cos^2 x - 2 \cos a \cos x \cos (a + x)$$

est indépendante de x.

Démontrer les relations :

33. $\sin (a + b) \sin (a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$

34. $\cos (a + b) \cos (a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$

Démontrer les formules :

35. $$\frac{\sin (a + b)}{\sin a + \sin b} = \frac{\cos \frac{a + b}{2}}{\cos \frac{a - b}{2}}.$$

36. $$\frac{\sin (a + b)}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin \frac{a + b}{2}}{\sin \frac{a - b}{2}}.$$

37. $$\frac{\sin (a + b)}{\cos a + \cos b} = \frac{\sin \frac{a + b}{2}}{\cos \frac{a - b}{2}}.$$

38. $$\frac{\sin (a + b)}{\cos a - \cos b} = \frac{\sin \frac{a + b}{2}}{\sin \frac{b - a}{2}}.$$

39. Démontrer la formule :

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 4 \sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2} \sin \frac{a + c - b}{2} \sin \frac{a + b - c}{2}.$$

40. Démontrer la relation :

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = \frac{\sin (a + b + c)}{\cos a \cos b \cos c}.$$

Etablir les relations :

41. $\sin a \sin (b - c) + \sin b \sin (c - a) + \sin c \sin (a - b) = 0.$

42. $\cos a \sin (b - c) + \cos b \sin (c - a) + \cos c \sin (a - b) = 0.$

43. $\cos (a + b) \sin (a - b) + \cos (b + c) \sin (b - c) + \cos (c + a) \sin (c - a) = 0.$

44. $\sin (a + b) \sin (a - b) + \sin (b + c) \sin (b - c) + \sin (c + a) \sin (c - a) = 0.$

Démontrer les relations :

45. $\cos (b + c) \cos (b - c) + \cos (c + a) \cos (c - a) + \cos (a + b) \cos (a - b) = \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c.$

46. $\sin (b + c) \cos (b - c) + \sin (c + a) \cos (c - a) + \sin (a + b) \cos (a - b) = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c.$

Démontrer les identités :

47. $\sin (b + c - a) + \sin (a + c - b) + \sin (a + b - c) - \sin (a + b + c) = 4 \sin a \sin b \sin c.$

48. $\cos (b + c - a) + \cos (a + c - b) + \cos (a + b - c) + \cos (a + b + c) = 4 \cos a \cos b \cos c.$

49. Démontrer l'identité :

$$\cos 3x = 4 \cos x \cos \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{4\pi}{3} \right).$$

50. Démontrer l'identité :

$$\sin 3x = 4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right).$$

51. Déduire la relation donnée dans l'exercice précédent de celle établie pour $\cos 3x$.

52. Résoudre l'équation :

$$\sin 4x + \sin 2x = \sin 3x.$$

53. Résoudre l'équation :

$$\cos 5x + \cos 3x = \cos 6x + \cos 2x.$$

54. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{cotg} (5x - \pi) = 1.$$

55. Résoudre l'équation :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

56. Résoudre l'équation :

$$\sin a + \sin (a + x) + \sin (a + 2x) + \sin (a + 3x) = 0$$

57. Résoudre l'équation :

$$\sin 2x = \operatorname{tg} x.$$

58. Résoudre l'équation :

$$\cos x = \operatorname{tg} x.$$

59. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x.$$

60.

$$\cos 3x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

61. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg}(a + x) \operatorname{tg}(a - x) = \frac{1 - 2 \cos 2a}{1 + 2 \cos 2a}.$$

62. Rendre calculable par logarithmes l'expression :

$$y = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

63. Rendre calculable par logarithme l'expression :

$$A = 1 + \sin a + \cos a.$$

64. Même question pour :

$$A = 1 + \cos a + \cos 2a.$$

65. Rendre calculabe par logarithmes :

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}.$$

66. A, B, C étant les angles d'un triangle, rendre calculable par logarithmes :

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

CHAPITRE VII

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES A UNE INCONNUE

67. Nous avons déjà rencontré des équations trigonométriques à propos de l'inversion des fonctions circulaires. Nous allons, maintenant, indiquer comment on résout les équations que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications.

L'arc — ou l'angle — inconnu peut entrer dans l'équation non seulement par ses fonctions circulaires, mais aussi par celle de ses multiples ou de ses sous-multiples; on commence, en appliquant les relations connues, par transformer l'équation de façon qu'elle ne contienne plus que les fonctions circulaires d'un seul arc inconnu, que nous désignerons par x; plusieurs cas peuvent alors se présenter.

68. I. ***L'équation contient une seule fonction circulaire de l'arc x.***

En la désignant par y, elle devient une équation algébrique en y, et la résolution revient à celle de cette équation, suivie d'une inversion. Nous avons déjà indiqué ce procédé de résolution.

69. II. ***L'équation contient plus d'une fonction circulaire de l'arc x.***

On la transforme de façon qu'elle contienne seulement le sinus et le cosinus; nous allons voir comment, pour les équations élémentaires, on ramène le problème au précédent.

70. 1° ***L'équation contient une des deux fonctions circulaires sin x et cos x au second degré seulement, et l'autre au premier et au second.***

Elle est de l'une des formes :

$$a \cos^2 x + b \cos x + c \sin^2 x + d = 0;$$

$$a \sin^2 x + b \sin x + c \cos^2 x + d = 0.$$

Règle : On conserve celle des deux fonctions circulaires qui entre au premier degré.

Ainsi, la première équation devient :

$$a\cos^2 x + b\cos x + c\,(1 - \cos^2 x) + d = 0.$$

Elle est du second degré en $\cos x$; on pose : $\cos x = y$, comme il a été expliqué plus haut.

71. 2° ***L'équation contient les deux fonctions circulaires au premier degré, mais au second degré dans l'ensemble.***

Elle est de la forme :

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d = 0.$$

On la nomme l'*équation quadratique* en $\sin x$ et $\cos x$.

RÈGLE : ***On prend comme inconnue*** $\operatorname{tg} x$.

Pour cela, on rend l'équation homogène en $\sin x$ et $\cos x$, en multipliant le terme indépendant d par $\sin^2 x + \cos^2 x$, ce qui donne :

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d\,(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$$

et on divise les deux membres par $\cos^2 x$; on obtient :

$$a + b\operatorname{tg} x + c\operatorname{tg}^2 x + d\,(\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0,$$

équation du second degré en $\operatorname{tg} x$.

72. Toutefois, pour que la division par $\cos x$ ne supprime pas de solutions, il faut que l'équation n'admette pas les solutions de $\cos x = 0$, c'est-à-dire que $\cos x$ ne se trouve pas en facteur; si $c + d = 0$, l'équation est de la forme :

$$A\cos^2 x + B\sin x\cos x = 0.$$

Elle se décompose en $\cos x = 0$ et $A\cos x + B\sin x = 0$, qui se ramène, de suite, à l'inversion d'une tangente.

La méthode que nous venons de donner sera employée lorsque les coefficients dépendent d'un paramètre et qu'il y a lieu de faire une discussion. Quand ils sont tous numériques, on ramène l'équation à une forme qui va être étudiée ensuite en prenant comme inconnue l'arc $2x$. On l'écrit :

$$2a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + 2c\sin^2 x + 2d = 0.$$

Or :

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x; \qquad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x,$$
$$2\sin x\cos x = \sin 2x;$$

en remplaçant, on obtient :

$$a(1 + \cos 2x) + b\sin 2x + c(1 - \cos 2x) + 2d = 0,$$

qui est de la forme :

$$A\cos 2x + B\sin 2x + C = 0;$$

que nous allons étudier.

73. 3° ***L'équation contient*** $\sin x$ ***et*** $\cos x$ ***seulement au premier degré. Elle s'écrit :***

$$a\cos x + b\sin x = c;$$

on la nomme l'équation classique en $\sin x$ et $\cos x$.

RESOLUTION DE L'EQUATION

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

74. Il existe, pour résoudre cette équation, deux méthodes principales : l'une, que l'on emploie de préférence quand les coefficients dépendent d'un paramètre, et qu'il y a lieu de faire une discussion, et qui consiste à prendre comme inconnue $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; l'autre, que l'on emploie toujours quand les coefficients sont numériques, et qui consiste à rendre le premier membre calculable par logarithmes, en utilisant un angle auxiliaire.

75. Première méthode.

Remplaçons $\cos x$ et $\sin x$ par leurs valeurs en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2},$$

l'équation devient :

$$\frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} + \frac{2bt}{1 + t^2} = c;$$

faisons disparaître les dénominateurs, et ordonnons après avoir fait passer tous les termes dans un même membre, nous obtenons :

$$(a + c)t^2 - 2bt + c - a = 0. \qquad (1)$$

Une tangente pouvant prendre une valeur quelconque, dans le cas le plus général la seule condition de possibilité est que l'équation ait des racines, c'est-à-dire que les coefficients vérifient l'inégalité :

$$b^2 - (c - a)(c + a) \geqslant 0,$$

qui donne :

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Supposons cette condition remplie et soit t' et t'' les deux racines de l'équation; déterminons des arcs α' et α'', tels que :

$$\operatorname{tg} \alpha' = t'; \qquad \operatorname{tg} \alpha'' = t'';$$

les solutions de l'équation étudiées seront données par .

$$\operatorname{tg} \frac{x'}{2} = \operatorname{tg} \alpha'; \qquad \operatorname{tg} \frac{x''}{2} = \operatorname{tg} \alpha'';$$

et en faisant les inversions :

$$\frac{x'}{2} = \alpha' + k'\pi; \qquad \frac{x''}{2} = \alpha'' + k''\pi;$$

$$x' = 2\alpha' + 2k'\pi; \qquad x'' = 2\alpha'' + 2k''\pi. \qquad (2)$$

On voit que tous les arcs solutions ont seulement deux extrémités sur le cercle trigonométrique, celles des arcs $2\alpha'$ et $2\alpha''$.

76. Deuxième méthode.

Nous supposerons $a \neq 0$, sans quoi nous serions ramenés de suite à l'inversion d'un sinus.

Divisons par a les deux membres de l'équation :

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a},$$

et déterminons un angle φ par la condition :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

en remplaçant, l'équation devient :

$$\cos x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x = \frac{c}{a},$$

$$\cos x \cos \varphi + \sin \varphi \sin x = \frac{c}{a} \cos \varphi,$$

c'est-à-dire : $\cos(x - \varphi) = \cos \alpha;$

en posant : $\cos \alpha = \frac{c}{a} \cos \varphi.$

Elle admet deux séries de solutions données par la formule d'inversion du cosinus :

$$x - \varphi = \pm \alpha + 2k\pi;$$

$$x' = \varphi - \alpha + 2k'\pi; \qquad x'' = \varphi + \alpha + 2k''\pi.$$

La seule condition de possibilité est que l'on puisse déterminer l'angle α, c'est-à-dire que l'on ait :

$$-1 \leqslant \frac{c}{a} \cos \varphi \leqslant 1;$$

ou : $\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \leqslant 1;$

or : $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2};$

et la condition s'écrit :

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1;$$

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

77. Remarques.

I. Il existe d'autres procédés de résolution. On pourrait prendre comme inconnue soit $\sin x$, soit $\cos x$; on serait conduit à des équations de la forme :

$$\pm a \sqrt{1 - \sin^2 x} + b \sin x = c;$$

$$a \cos x \pm b \sqrt{1 - \cos^2 x} = c;$$

mais, à cause de la présence des radicaux, les discussions se feraient moins facilement.

78. II. On peut aussi donner une solution **géométrique** de l'équation. Posons :

$$\cos x = X; \qquad \sin x = Y.$$

Les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique dans le système d'axe A'A, B'B, sont X et Y, et l'équation du cercle est :

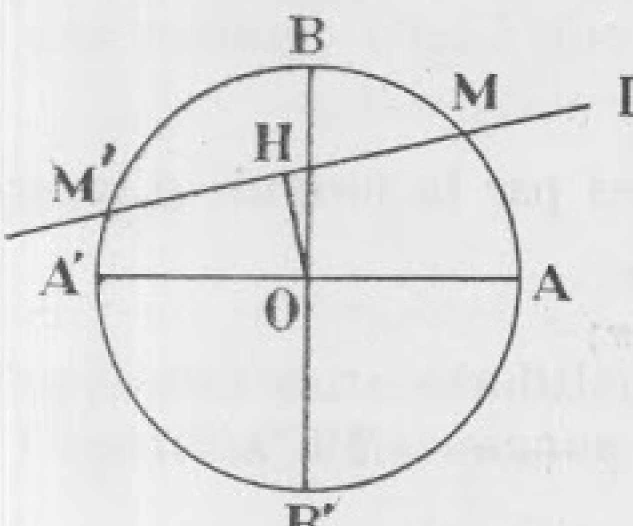


Fig. 25.

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

L'équation $a \cos x + b \sin x = c$ s'écrit :

$$aX + bY = c$$

et représente une droite D.

Les extrémités des arcs solutions de l'équation sont les points communs à la droite D et au cercle; il y en a deux, une seule ou aucune suivant que la droite D est sécante, tangente ou non sécante.

La condition de possibilité se retrouve en écrivant que la distance OH du centre O à la droite D est inférieure ou égale au rayon 1 du cercle trigonométrique. Calculons les coordonnées du point H. Le coefficient angulaire de la droite D est : $-\frac{a}{b}$, celui de la perpendiculaire OH est $\frac{b}{a}$ et cette perpendiculaire a pour équation :

$$Y = \frac{b^2}{a} X.$$

Remplaçons Y par cette valeur dans l'équation de D, nous obtenons pour calculer l'abscisse du point H l'équation :

$$aX' + \frac{b}{a} X' = c;$$

qui donne :

$$X' = \frac{-ac}{a^2 + b^2}; \qquad \text{puis :} \qquad Y' = \frac{-bc}{a^2 + b^2},$$

et l'on a :

$$\overline{OH}^2 = X'^2 + Y'^2 = \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2},$$

et la condition de possibilité est :

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1;$$

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

79. III. Dans les applications, l'inconnue x est presque toujours soit un angle d'un triangle, soit un angle aigu. La discussion de l'équation en t se ramène alors à une discussion de problème du second degré.

Si l'angle x est compris entre 0 et π, $\frac{x}{2}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ l'inconnue t doit être positive.

Si x est aigu, $\frac{x}{2}$ est inférieur à $\frac{\pi}{4}$ et l'on doit avoir :

$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Dans ces deux cas, il ne faut pas écrire les formules d'inversion sous leurs formes générales, mais prendre seulement les solutions qui sont comprises soit entre 0 et π, soit entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

80. IV. La résolution de l'équation quadratique, quand les coefficients sont numériques, se fait par la seconde méthode, en utilisant un angle auxiliaire.

EXEMPLES ET APPLICATIONS

81. I. *Résoudre l'équation :* $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$.

Les coefficients sont numériques; posons : $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

l'équation s'écrit :

$$\cos x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin x = \sqrt{2};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

et les solutions sont données par :

$$x - \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi;$$

$$x' = \frac{\pi}{12} + 2k'\pi; \qquad x'' = \frac{7\pi}{12} + 2k''\pi.$$

On voit ici pourquoi la première méthode ne permettrait pas de calculer facilement les solutions; les racines de l'équation en t seraient :

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} \frac{7\pi}{24}$$

dont on ne connaît pas, à priori, les valeurs; mais la comparaison des deux méthodes permettrait de calculer ces tangentes, la plus petite racine étant $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24}$ et la plus grande $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{24}$.

82. II. ***On donne une demi-circonférence de diamètre*** AB = 2 R, ***et une tangente parallèle à ce diamètre; on prend sur ce diamètre et en sens contraires deux longueurs égales*** OM ***et*** OM′; ***des points*** M ***et*** M′ ***on mène les tangentes qui rencontrent en*** P ***et*** P′ ***la tangente parallèle à*** AB. ***On fait tourner la figure*** MPP′M′ ***autour de*** AB; ***déterminer l'angle*** x ***que fait*** MP ***avec*** MM′, ***de façon que l'aire du solide ainsi engendré ait une valeur donnée*** $2\,m\pi R^2$, ***m étant un nombre positif donné. Discuter.***

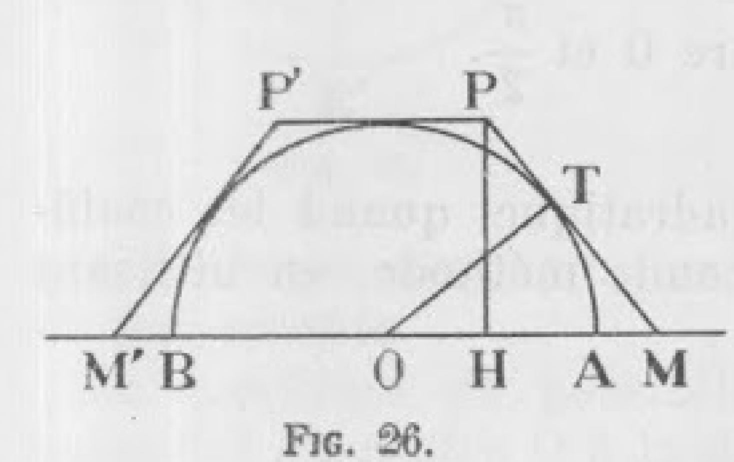


FIG. 26.

L'aire S du solide considéré est la somme des surfaces latérales de deux cônes et d'un cylindre. Menons PH perpendiculaire sur AB; on a :

$$S = 2\pi.HP\,(MP + 2\,OH).$$

Soit T le point de contact de la tangente MP; les deux triangles OTM et PHM ont leurs angles égaux; comme OT = HP = R, ils sont égaux, et l'on a :

$$MP = OM = \frac{R}{\sin x}, \quad HM = R \operatorname{cotg} x;$$

puis :

$$OH = OM - HM = \frac{R}{\sin x} - \frac{R\cos x}{\sin x} = \frac{R\,(1-\cos x)}{\sin x};$$

et en remplaçant dans S :

$$S = 2\,\pi R^2 \left[\frac{1}{\sin x} + \frac{2\,(1-\cos x)}{\sin x}\right] = \frac{2\,\pi R^2\,(3 - 2\cos x)}{\sin x}.$$

En écrivant que $S = 2\,m\pi R^2$, nous obtenons pour déterminer x l'équation :

$$\frac{2\,\pi R^2\,(3-2\cos x)}{\sin x} = 2\,m\pi R^2,$$

qui s'écrit en divisant les deux membres par $2\,\pi R^2$ et en chassant le dénominateur :

$$m \sin x + 2\cos x = 3.$$

Prenons comme inconnue $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, l'équation s'écrit :

$$\frac{2\,mt}{1+t^2} + \frac{2\,(1-t^2)}{1+t^2} = 3;$$

et, en ordonnant par rapport à t :

$$f(t) = 5\,t^2 - 2\,mt + 1 = 0. \qquad (1)$$

L'angle x étant aigu, $\frac{x}{2}$ doit être compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ et le problème aura autant de solutions que l'équation (1) aura de racines vérifiant la double inégalité :

$$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Formons :

$$f(0) = 1; \qquad f(1) = 6 - 2\,m = 2\,(3-m) = f(0)f(1).$$

Si $3 - m < 0$, $3 < m$, le produit $f(0)f(1)$ est négatif; l'équation a une seule racine entre 0 et 1; le problème a une seule solution, donnée par la plus petite racine, car $f(0)$ étant positif, 0 est extérieur à l'intervalle des racines, et :

$$0 < t' < 1 < t''.$$

Le problème aura deux solutions si les inégalités qui suivent sont vérifiées simultanément :

$$f(0)f(1) > 0; \quad 5\,f(0) > 0; \quad 0 < \frac{m}{5} < 1; \quad \text{et} \quad \Delta > 0,$$

Δ désignant le discriminant. Les deux premières sont vérifiées si :

$$m < 3;$$

les suivantes le sont alors aussi; Δ donne :

$$m^2 - 5 > 0;$$
$$\sqrt{5} < m.$$

Il y a donc deux solutions si :

$$\sqrt{5} < m < 3.$$

Dans le cas limite où $m = \sqrt{3}$, l'équation a une racine double qui convient; si $m = 3$, les racines sont 1 et $\frac{1}{5}$ et conviennent aussi. A la première correspond l'angle $\frac{\pi}{2}$, le point M est au point A.

83. Bien que l'on fasse les discussions en prenant l'équation en t, il n'est pas inutile de montrer, sur l'exemple traité, comment on peut cependant faire la discussion lorsque l'on emploie la seconde méthode de résolution.

Reprenons l'équation :

$$2\cos x + m \sin x = 3.$$

En posant :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{2} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{3}{2} \cos \varphi,$$

les racines sont données par la formule :

$$x - \varphi = \pm \alpha;$$

et sont :

$$x' = \varphi - \alpha; \qquad x'' = \varphi + \alpha.$$

La condition d'existence de l'angle α s'écrit :

$$\frac{9}{4} \cos^2 \varphi \leqslant 1.$$

Or : $$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{4}{4 + m^2}$$

et l'on doit avoir : $$\frac{9}{4 + m^2} \leqslant 1,$$

c'est-à-dire : $5 \leqslant m^2$; $\sqrt{5} \leqslant m$.

On aurait pu écrire de suite cette condition en remplaçant dans la condition donnée dans le cas général : $c^2 \leqslant a^2 + b^2$.

L'angle x étant inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$, le problème aura deux solutions si l'on a :

$$\varphi - \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}; \qquad \varphi + \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Puisque $\cos \alpha = \frac{3}{2} \cos \varphi$, ou $\alpha < \varphi$, $\varphi - \alpha > 0$; et il suffit que l'on ait :

$$\varphi + \alpha < \frac{\pi}{2}; \qquad \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

c'est-à-dire :

$$\cos \varphi > \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \cos^2 \varphi > \sin^2 \alpha.$$

Or : $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9 \cos^2 \varphi}{4}$ et la condition devient :

$$\cos^2 \varphi \geqslant 1 - \frac{9 \cos^2 \varphi}{4};$$

$$13 \cos^2 \varphi \geqslant 4;$$

ou enfin :

$$\frac{13 \times 4}{4 + m^2} \geqslant 4; \qquad 9 \geqslant m^2; \qquad m \leqslant 3$$

Ainsi, il y a deux solutions si :

$$\sqrt{5} \leqslant m \leqslant 3.$$

Il n'y en a plus qu'une si $3 < m$, l'angle $\varphi - \alpha$ convenant seul.

On voit que ce second mode de discussion est certainement plus pénible que le premier.

84. III. On demande souvent de trouver la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation classique pour que les solutions satisfassent à une condition donnée. Lorsqu'on prend la première méthode de résolution le problème se ramène à un calcul de fonctions symétriques des racines de l'équation en t; il est, en général, plus avantageux d'utiliser la seconde méthode de résolution. Nous allons traiter un exemple en suivant successivement les deux méthodes.

85. Problème. — *Quand l'équation :* **a cos x + b sin x = c** *a deux séries de solutions, trouver la relation qui doit exister entre les coefficients pour que les deux rayons du cercle trigonométrique aboutissant aux extrémités des arcs solutions soient rectangulaires.*

En posant : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ et $\cos \alpha = \frac{c}{a} \cos \varphi$, avec $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, les solutions de l'équation sont données par :

$$x' = \varphi - \alpha + 2k'\pi;$$

$$x'' = \varphi + \alpha + 2k''\pi.$$

Si M′ et M″ sont les extrémités des arcs solutions sur le cercle trigonométrique, on a :

$$\widehat{M'OM''} = |x'' - x'| = |2\alpha + 2h\pi|;$$

et, si les deux rayons OM′ et OM″ sont rectangulaires, on doit avoir :

$$2\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha = \pm \frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \pm 1;$$

et : $$\operatorname{tg}^2 \alpha = 1;$$

ce qui s'écrit :

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha; \qquad 2 \cos^2 \alpha = 1.$$

Or : $\cos^2 \alpha = \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi = \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$

$$= \frac{c^2 a^2}{a^2 (a^2 + b^2)} = \frac{c^2}{a^2 + b^2};$$

et la condition demandée est :

$$2 c^2 = a^2 + b^2.$$

Prenons maintenant l'équation en t :

$$(c + a) t^2 - 2 bt + c - a = 0.$$

Si t' et t'' sont les deux racines, on a :

$$\operatorname{tg} \frac{x'}{2} = t'', \qquad \operatorname{tg} \frac{x''}{2} = t'' ;$$

d'où l'on déduit :

$$\operatorname{tg} \frac{x' - x''}{2} = \frac{t' - t''}{1 + t't''};$$

et l'on doit avoir :

$$\frac{t' - t''}{1 + t't''} = \pm 1,$$

c'est-à-dire :

$$(t' - t'')^2 = (1 + t't'')^2;$$

ou :

$$(t' + t'')^2 - 4 t't'' = (1 + t't'')^2;$$

remplaçons la somme et le produit des racines par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\frac{4 b^2}{(c + a)^2} - \frac{4 (c - a)}{c + a} = \left(1 + \frac{c - a}{c + a}\right)^2;$$

ce qui donne, en chassant les dénominateurs :

$$4 b^2 - 4(c^2 - a^2) = 4 c^2; \qquad b^2 - c^2 + a^2 = c^2;$$

ou :

$$a^2 + b^2 = 2 c^2.$$

Observons que $c + a \neq 0$, puisqu'on a supposé que l'équation a deux racines.

Equation symétrique en sin *x* et cos *x* :

$$a (\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0.$$

86. On voit, de suite, qu'on peut obtenir une équation algébrique en prenant comme inconnue $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, mais l'équation est complète du quatrième degré, et nous ne savons pas, en général, la résoudre. Nous passerons par l'intermédiaire d'une équation auxiliaire en posant :

$$\sin x + \cos x = z. \tag{1}$$

Nous obtenons, en élevant les deux membres au carré :

$$1 + 2 \sin x \cos x = z^2;$$

d'où :

$$2 \sin x \cos x = z^2 - 1;$$

et l'équation donnée s'écrit, en y remplaçant $\sin x + \cos x$ et $2 \sin x \cos x$ par les valeurs précédentes après avoir multiplié par 2 :

$$2 az + b(z^2 - 1) + 2 c = 0;$$

$$bz^2 + 2 az + 2 c - b = 0; \tag{2}$$

soit z' une racine de cette équation, il lui correspondra, pour l'équation donnée deux séries de solutions données par l'équation :

$$\sin x + \cos x = z',$$

à condition que l'on ait :

$$z'^2 \leqslant 2,$$

c'est-à-dire :

$$-\sqrt{2} \leqslant z' \leqslant \sqrt{2}. \tag{3}$$

La discussion revient donc à chercher combien l'équation (2) a de racines vérifiant l'inégalité (3).

On résoudrait d'une façon analogue en posant :

$$\sin x - \cos x = z,$$

l'équation :

$$a (\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0.$$

87. On peut aussi résoudre l'équation :

$$a (\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

en prenant une nouvelle inconnue, y, définie par :

$$x = \frac{\pi}{4} + y.$$

On a alors $\sin x + \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right);$$

et, en transformant le second membre en produit :

$$\sin x + \cos x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos y = \sqrt{2} . \cos y;$$

$$\sin x \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2y;$$

et l'équation prend la forme :

$$2a\sqrt{2} \cos y - b \cos 2y + 2c = 0;$$

qui se ramène à une équation du second degré en $\cos y$, en remplaçant $\cos 2y$ par $2\cos^2 y - 1$:

$$2b \cos^2 y - 2a\sqrt{2} \cos y - 2c + b = 0.$$

Pour l'équation :

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0,$$

on posera $x = \frac{3\pi}{4} + y.$

88. Remarque relative à la résolution des équations trigonométriques à une inconnue. — On hésite souvent sur le choix de la fonction circulaire à conserver pour obtenir une équation algébrique. La règle suivante, due à M. Bioche, permet d'éviter toute difficulté.

En supposant que l'inconnue x figure par ses lignes trigonométriques ou celles de ses multiples — mais non par celles de ses sous-multiples — on remplace dans l'équation proposée x par $-x$, par $\pi - x$ et par $\pi + x$.

Si la première substitution laisse l'équation inaltérée, on exprimera tout en fonction de $\cos x$; si c'est la seconde, on choisira $\sin x$ et si c'est la dernière, on prendra $\operatorname{tg} x$.

Si aucune des substitutions ne conserve l'équation donnée, on prendra comme inconnue $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, et si toutes la conservent on prendra $\cos 2x$.

On se rendra facilement compte que cette règle donne les procédés que nous avons donnés pour les équations que nous avons étudiées.

EXERCICES

67. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg} 2x = m \operatorname{tg} x.$$

(*Bacc.*, Besançon.)

68. Résoudre l'équation :

$$a \cos 2x = 4 \sin x.$$

(*Bacc.*, Bordeaux.)

69. Résoudre l'équation : $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1.$

70. Résoudre l'équation :

$$\sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x = \sqrt{2}.$$

(*Bacc.*, Paris.)

71. Valeurs en degrés de x vérifiant l'équation :

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

72. Résoudre l'équation :

$$\sin 3x - \sin 2x = m \sin x.$$

(*Bacc.*, Clermont.)

73. Résoudre l'équation :

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

74. Résoudre et discuter l'équation :

$$(2m - 1) \cos x + m \sin x = 3m - 1.$$

(*Bacc.*, Lille.)

75. Déterminer m pour que l'on ait $x' - x'' = \frac{\pi}{2}$ x' et x'' étant solutions de l'équation :

$$m \cos x - (m + 1) \sin x = m.$$

(*Bacc.*, Alexandrie.)

76. Résoudre l'équation : $a \cos x + b \sin x = c$, en lui adjoignant la relation : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

77. Résoudre l'équation :

$$1 + \cos x = m + m \sin x.$$

78. Résoudre et discuter l'équation :

$$3 \cos x \cos (a - x) = 2 \sin^2 x.$$

(*Bacc.*, Besançon.)

79. Résoudre l'équation :

$$4 \sin x \cos x - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$$

80. Résoudre et discuter l'équation :

$$\sin x + \cos x = 1 + 2m \sin x \cos x.$$

(*Bacc.*, Strasbourg.)

CHAPITRE VIII

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES. INÉGALITÉS

---

89. Dans un certain nombre de problèmes, on rencontre des systèmes de deux équations à deux inconnues; nous allons, sans faire de théorie générale, expliquer la résolution de ceux qui se présentent le plus fréquemment.

90. 1. ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \sin x + \sin y = b. \end{cases}$$

Nous connaissons la somme des deux arcs inconnus; calculons leur différence et, pour cela, transformons en produit le premier membre de la seconde équation; elle s'écrit :

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b,$$

c'est-à-dire : $$2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b,$$

et donne : $$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2 \sin \frac{a}{2}}.$$

Déterminons un arc α par l'égalité :

$$\cos \alpha = \frac{b}{2 \sin \frac{a}{2}}, \qquad (1)$$

les arcs $\frac{x-y}{2}$ sont donnés par l'équation :

$$\frac{x-y}{2} = \pm \alpha + 2k\pi.$$

qui, avec : $$\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2},$$

forme un système du premier degré que l'on résout par addition et soustraction :

$$x = \frac{a}{2} \pm \alpha + 2k\pi;$$

$$y = \frac{a}{2} \mp \alpha - 2k\pi.$$

La condition de possibilité est que la relation (1) permette de calculer l'arc α, c'est-à-dire que l'on ait :

$$-1 \leqslant \frac{b}{2 \sin \frac{a}{2}} \leqslant 1;$$

ce que l'on peut écrire :

$$\frac{b^2}{4 \sin^2 \frac{a}{2}} \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad b^2 \leqslant 4 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

91. Remarques. — 1. On pourrait aussi résoudre le système étudié par la méthode de substitution, en portant dans la seconde équation la valeur de y tirée de la première, ce qui donne :

$$\sin x + \sin (a - x) = b;$$

en effectuant et en groupant les termes, cette équation prend la forme :

$$(1 - \cos a) \sin x + \sin a \cos x = b;$$

c'est une équation classique en $\sin x$ et $\cos x$. La condition d'existence des solutions s'écrit :

$$b^2 \leqslant (1 - \cos a)^2 + \sin^2 a;$$

ou : $$b^2 \leqslant 2 - 2 \cos a;$$

$$b^2 \leqslant 4 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

92. 2. On résoudra d'une façon analogue à celle qui a été donnée l'un quelconque des systèmes :

$$\begin{matrix} x \pm y = a; & x \pm y = a; \\ \sin x \pm \sin y = b; & \cos x \pm \cos y = b. \end{matrix}$$

93. II. ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} x - y = a; \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

Calculons la somme $x + y$ en écrivant la seconde équation :

$$2 \cos x \cos y = 2 b;$$

et en transformant en somme le premier membre :

$$\cos (x + y) + \cos (x - y) = 2 b;$$

d'où :

$$\cos (x + y) = 2 b - \cos a;$$

si α est un arc tel que : $2 b - \cos a = \cos \alpha$, on a :

$$x + y = \pm \alpha + 2 k\pi,$$

qui avec :

$$x - y = a,$$

détermine x et y par addition et soustraction.

Pour que l'arc α existe, il faut et il suffit que l'on ait :

ou : $$-1 \leqslant 2 b - \cos a \leqslant 1;$$

ce qui s'écrit :

$$\cos a - 1 \leqslant 2 b \leqslant 1 + \cos a;$$

$$-2 \sin^2 \frac{a}{2} \leqslant 2 b \leqslant 2 \cos^2 \frac{a}{2};$$

et donne : $$-\sin^2 \frac{a}{2} \leqslant b \leqslant \cos^2 \frac{a}{2}.$$

94. On pourrait aussi résoudre, par substitution, en tirant y de la première équation et portant dans la seconde, qui devient :

$$\cos x \cos (x - a) = b;$$

et en effectuant :

$$\cos a \cos^2 x + \sin a \sin x \cos x = b,$$

équation quadratique en $\sin x$ et $\cos x$.

On résoudra comme plus haut un des systèmes :

$$\begin{cases} x \pm y = a; \\ \cos x \cos y = b. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = a; \\ \sin x \sin y = b. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = a; \\ \sin x \cos y = b. \end{cases}$$

95. III. ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

On peut ramener ce système à un des précédents en transformant le premier membre de la seconde équation, qui s'écrit :

$$\frac{\sin (x + y)}{\cos x \cos y} = b;$$

et donne :

$$\cos x \cos y = \frac{\sin a}{b}.$$

Dans beaucoup de cas, il est plus commode de former l'équation du second degré ayant pour racines $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} y$. La première équation donne :

$$\operatorname{tg} (x + y) = \operatorname{tg} a;$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} a; \qquad \frac{b}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} a;$$

d'où l'on tire : $$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} a - b}{\operatorname{tg} a};$$

$\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} y$ sont alors les racines de l'équation :

$$t^2 - bt + \frac{\operatorname{tg} a - b}{\operatorname{tg} a} = 0.$$

96. Cette seconde méthode ne serait plus applicable à l'un des systèmes :

$$(1) \begin{cases} x - y = a; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b. \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x \pm y = a; \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = b; \end{cases}$$

pour lesquels il faudrait appliquer le premier procédé qui conduit à des équations classiques; par exemple, pour le système (1) on a :

$$\sin (x + y) = b \cos x \cos y.$$

Or :

$$2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y) = \cos (x + y) + \cos a,$$

et l'équation précédente devient :

$$2 \sin (x + y) = b \cos (x + y) + b \cos a;$$

équation classique en $\sin (x + y)$ et $\cos (x + y)$.

On peut, pour tous les systèmes (1) et (2), appliquer la méthode de substitution qui conduit à des équations du second degré en $\operatorname{tg} x$.

97. IV. ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

La première équation s'écrit :

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} a \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - b} = \operatorname{tg} a;$$

et donne : $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (1 - b) \operatorname{tg} a.$

Tg x et tg y sont racines de l'équation du second degré :

$$t^2 - (1 - b) \operatorname{tg} a \,.\, t + b = 0,$$

que l'on discute suivant les cas qui peuvent se présenter.

98. V. ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = k. \end{cases}$$

La seconde équation peut s'écrire :

$$\frac{\sin x}{k} = \frac{\sin y}{1} = \frac{\sin x + \sin y}{k + 1} = \frac{\sin x - \sin y}{k - 1};$$

d'où :

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{k - 1}{k + 1}.$$

Transformons en produits les deux termes de la première fraction; nous obtenons :

$$\frac{2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}}{2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}} = \frac{k-1}{k+1},$$

ce qui s'écrit :

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} \operatorname{cotg} \frac{x+y}{2} = \frac{k-1}{k+1};$$

et donne

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

qui détermine les arcs $\dfrac{x-y}{2}$.

On traitera de la même façon les systèmes :

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = k. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = a; \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = k. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = a; \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = k. \end{cases}$$

On pourrait aussi employer la méthode de substitution; elle conduit pour calculer un des arcs x ou y à une équation du premier degré en tg x ou en tg y.

99. VI ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = k. \end{cases}$$

On écrit la seconde équation :

$$\frac{\sin x \cos y}{\sin y \cos x} = k;$$

ou encore :

$$\frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\sin y \cos x + \sin x \cos y} = \frac{k - 1}{k + 1},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\sin (x - y)}{\sin (x + y)} = \frac{k - 1}{k + 1}$$

qui détermine : $\sin (x - y) = \dfrac{(k - 1) \sin a}{k + 1}.$

On résoudrait de la même façon le système :

$$\begin{cases} x - y = a; \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = k. \end{cases}$$

100. VII. ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} \sin x \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b; & (1) \\ \cos y \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} a. & (2) \end{cases}$$

Cherchons à éliminer y entre les deux équations. La seconde donne :

$$\cos y = \frac{\operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} x}.$$

En portant cette valeur de $\cos y$ dans la première, elle devient :

$$\sin x \sin y = \operatorname{tg} b \cos y = \frac{\operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} x};$$

et donne :

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a}{\cos x}.$$

Ecrivons que $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$; nous obtenons pour calculer x l'équation :

$$\frac{\operatorname{tg}^2 b \operatorname{cotg}^2 a}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{cotg}^2 a}{\operatorname{cotg}^2 x} = 1,$$

c'est-à-dire en remplaçant $\operatorname{cotg}^2 x$ en fonction de $\cos x$:

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x};$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 b \operatorname{cotg}^2 a}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{cotg}^2 a (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = 1;$$

d'où l'on tire :

$$\cos^2 x = \frac{\operatorname{cotg}^2 a (1 + \operatorname{tg}^2 b)}{1 + \operatorname{cotg}^2 a} = \frac{\cos^2 a \sin^2 a}{\cos^2 b \sin^2 a};$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b}, \qquad \cos x = \pm \frac{\cos a}{\cos b}.$$

On a ensuite :

$$\sin y = \frac{\operatorname{tg} b \operatorname{cotg} a}{\pm \dfrac{\cos a}{\cos b}} = \pm \frac{\sin b}{\sin a};$$

et l'on est ramené à deux inversions de fonctions circulaires.

Il faut que l'on ait :

$$\left| \frac{\cos a}{\cos b} \right| \leqslant 1, \qquad \left| \frac{\sin b}{\sin a} \right| \leqslant 1.$$

101. VIII. ***Résoudre le système :***

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a; \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$$

Transformons les deux membres en produits, les équations s'écrivent :

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a;$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b; \qquad (1)$$

et, en divisant membres à membres :

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{a}{b};$$

équation qui donne :

$$\frac{x+y}{2} = \alpha + k\pi; \qquad (2)$$

α étant un arc déterminé par $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{b}$.

Remplaçons dans l'équation (1); elle devient :

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2 \cos (\alpha + k\pi)} = \frac{b}{(-1)^k \times 2 \cos \alpha};$$

si β est un arc déterminé par l'égalité :

$$\cos \beta = \frac{b}{(-1)^k \cdot 2 \cos \alpha}.$$

On aura :

$$\frac{x-y}{2} = \pm \beta + 2k'\pi. \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3) donneront x et y par addition et soustraction.

Pour que le système soit possible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$-1 \leqslant \frac{b}{(-1)^k \times 2 \cos \alpha} \leqslant 1;$$

ce qui s'écrit :

$$b^2 \leqslant 4 \cos^2 \alpha.$$

Or : $\quad \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{b^2}{a^2 + b^2};$

et la condition se réduit à :

$$b^2 \leqslant \frac{4 b^2}{a^2 + b^2};$$

$$a^2 + b^2 \leqslant 4.$$

INEGALITES TRIGONOMETRIQUES A UNE INCONNUE

102. Une inégalité trigonométrique est une inégalité où l'inconnue entre par ses fonctions circulaires. On suit, pour la résoudre, une marche analogue à celle qui a été suivie pour les équations : on transforme l'inégalité de façon qu'elle contienne une seule fonction circulaire d'un seul arc inconnu; on désigne cette fonction circulaire par une lettre et on résoud l'inégalité algébrique ainsi obtenue, puis, en se servant du cercle trigonométrique, on détermine les arcs de ce cercle où doit se trouver l'extrémité de l'inconnue pour que l'inégalité soit vérifiée.

103. Exemple :

Résoudre l'inégalité : $\cos 2x + \sin x > 0$.

L'inégalité s'écrit en remplaçant $\cos 2x$ par sa valeur en fonction de $\sin x$:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x > 0;$$

ou :

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0.$$

Posons $\sin x = y$, nous obtenons l'inégalité du second degré :

$$2y^2 - y - 1 < 0.$$

Le premier membre a pour racines évidentes 1 et $-\frac{1}{2}$ et l'inégalité est vérifiée si :

$$-\frac{1}{2} < y < 1.$$



Fig. 27.

Marquons sur l'axe des sinus du cercle trigonométrique le point P défini par :

$$\overline{OP} = -\frac{1}{2}.$$

Tous les arcs dont les sinus sont compris dans l'intervalle $-\frac{1}{2}$, 1, sont terminés sur la partie doublée du cercle et sont solutions de l'inégalité étudiée.

Si on avait demandé de résoudre l'inégalité en supposant l'arc x compris entre 0 et 2π, il suffisait de remarquer que l'arc AM, inférieur

à 2π, a pour mesure : $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ et que l'arc AM' a pour mesure $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$; et l'inégalité est vérifiée si l'on a :

$$0 < x < \frac{7\pi}{6} \quad \text{ou bien :} \quad \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi.$$

EXERCICES

81. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b. \end{cases}$$

82. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \cos^2 x - \cos^2 y = b. \end{cases}$$

83. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \sin(x + y) = \cos(x - y); \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

84. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = \frac{1}{2}; \\ \sin(x + y) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

85. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\cos x \cos y = 1; \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

86. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a; \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

87. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha; \\ \cos x + \cos y = 1 + \cos \alpha. \end{cases}$$

88. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a; \\ \cos 2x + \cos 2y = b. \end{cases}$$

89. Résoudre le système :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a; \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = b. \end{cases}$$

90. Trouver toutes les valeurs de $\sin x$ et de $\sin y$ vérifiant les équations :

$$\begin{cases} \sin y = k \sin x; \\ 2 \cos x + \cos y = 1. \end{cases}$$

Quelles valeurs faut-il donner à k pour que le problème soit possible.

91. Trouver la relation que doivent vérifier a, b et α, pour que les trois équations :

$$\sin x + \sin y = a;$$
$$\cos x + \cos y = b;$$
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

soient compatibles.

92. Démontrer que si les trois équations :

$$a \sin^2 x + a' \cos^2 x = b;$$
$$a \sin^2 y + a' \cos^2 y = b';$$
$$a \operatorname{tg} x = a' \operatorname{tg} y$$

sont compatibles, on a :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}.$$

93. Trouver la condition pour que les trois équations :

$$a^2 \cos^2 x - b^2 \cos^2 y = c^2;$$
$$a \cos x + b \cos y = d;$$
$$a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y$$

soient compatibles.

94. Résoudre l'inégalité :

$$2 \sin^2 x - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \sin x + \frac{\sqrt{6}}{2} \leqslant 0.$$

95. Résoudre l'inégalité :

$$\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \geqslant 0.$$

96. Trouver les arcs x compris entre 0 et π vérifiant l'inégalité :

$$\sin x + \cos x > 1.$$

97. Résoudre l'inégalité :

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x - 2 > \cos 2x.$$

98. Résoudre l'inégalité :

$$6 \cos^2 x - 5 \cos x + 1 > 0.$$

99. Résoudre l'inégalité :

$$\sin^2 x - 5 \sin x + 6 > 0.$$

100. Résoudre l'inégalité :

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 < 0.$$

CHAPITRE IX

APPLICATION DE LA TRIGONOMÉTRIE AUX TRIANGLES

104. ***Résoudre un triangle*** c'est, connaissant certains éléments du triangle, trouver des formules calculables par logarithmes, permettant de déterminer les éléments inconnus du triangle. On appelle cas classiques de résolution ceux où les éléments donnés sont des côtés ou des angles en nombre suffisant pour que le triangle cherché existe.

RESOLUTION DE TRIANGLES RECTANGLES DANS LES CAS CLASSIQUES

105. Nous commencerons par le triangle rectangle. Un triangle rectangle est déterminé si l'on donne deux éléments, autres que l'angle droit, et qui ne sont pas deux angles. Nous désignerons par A, B, C, les mesures des angles en grades ou en degrés, par a, b, c, les mesures des côtés opposés aux angles A, B, C, et, dans un triangle rectangle, A sera l'angle droit. Nous utiliserons les grades; on passera facilement aux mesures en degrés.

Il y a quatre cas de résolution des triangles rectangles : on peut donner un angle aigu et un côté, qui peut être soit un côté de l'angle droit, soit l'hypoténuse; on peut donner deux côtés, qui peuvent être les côtés de l'angle droit, ou bien un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.

106. Premier cas. — ***On donne un angle aigu et un côté de l'angle droit.***

Soit B et b; les inconnues sont C, c, a, et on ajoute, en général, la surface S. On a, de suite : $C = 100^{gr} - B$;

puis : $c = b \operatorname{cotg} B$; $a = \dfrac{b}{\sin B}$, $\quad S = \dfrac{1}{2}\, bc = \dfrac{1}{2}\, b^2 \operatorname{cotg} B.$

Le problème est toujours possible.

107. Deuxième cas. — *On donne un angle aigu et l'hypoténuse.*

Soit B et a; les inconnues sont C, b, c et S.

$$C = 100^{gr} - B; \qquad b = a \sin B:$$

$$c = a \cos B; \qquad S = \frac{1}{2}\, bc = \frac{1}{2}\, a^2 \sin B \cos B.$$

Le problème est toujours possible.

108. Troisième cas. — *On donne les deux côtés de l'angle droit.*

Soit b et c; les inconnues sont B, C, a et S.

On a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \qquad C = 100^{gr} - B, \qquad a = \frac{b}{\sin B}, \qquad S = \frac{1}{2}\, bc.$$

Le problème est toujours possible.

109. Quatrième cas. — *On donne un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.*

Soit b et a.

On a :

$$\sin B = \frac{b}{a}, \qquad c = 100^{gr} - B, \qquad c = a \cos B, \qquad S = \frac{1}{2}\, ab \cos B.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer l'angle B, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{b}{a} < 1; \qquad b < a,$$

ce qui est la condition géométrique d'existence du triangle.

TRIANGLES QUELCONQUES

110. Un triangle est géométriquement déterminé dès que l'on donne trois de ses éléments, angles ou côtés, qui ne soient pas tous des angles. Il doit donc exister entre les côtés et les angles d'un triangle trois relations distinctes, permettant de calculer trois des six éléments quand on donnera les trois autres, et il ne peut pas en exister plus de trois, car s'il y en avait quatre, elles permettraient de calculer quatre des éléments en fonction des deux autres, ce qui n'est pas possible, puisqu'un triangle n'est pas déterminé par deux éléments seulement.

On donne aux trois relations dont nous venons de prévoir l'existence des formes différentes. Nous allons établir les plus importantes.

I. Relations des sinus.

111. Ce premier groupe est formé des relations suivantes :

$$(\text{I}) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}; \\ A + B + C = 200^{gr}. \end{array} \right.$$

La dernière a été établie en géométrie. Nous donnerons deux démonstrations des deux premières conduisant à des relations importantes.

112. Première démonstration. — Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; menons le diamètre BOD et joignons DC. Si l'angle A est aigu, les deux angles BAC et BDC sont égaux comme inscrits interceptant le même arc, et le triangle BDC, rectangle en C, donne :

$$BC = BD \sin D = 2\,R \sin D;$$

c'est-à-dire :

$$a = 2\,R \sin A, \qquad \frac{a}{\sin A} = 2\,R.$$

Fig. 28.

Si l'angle A est obtus, les deux angles A et D sont supplémentaires; et comme ils ont même sinus, on a encore :

$$BC = 2\,R \sin (200 - A) = 2\,R \sin A;$$

et :

$$\frac{a}{\sin A} = 2\,R.$$

On démontrerait d'une façon analogue que :

$$\frac{b}{\sin B} = 2\,R \qquad \frac{c}{\sin C} = 2\,R.$$

Les relations sont établies.

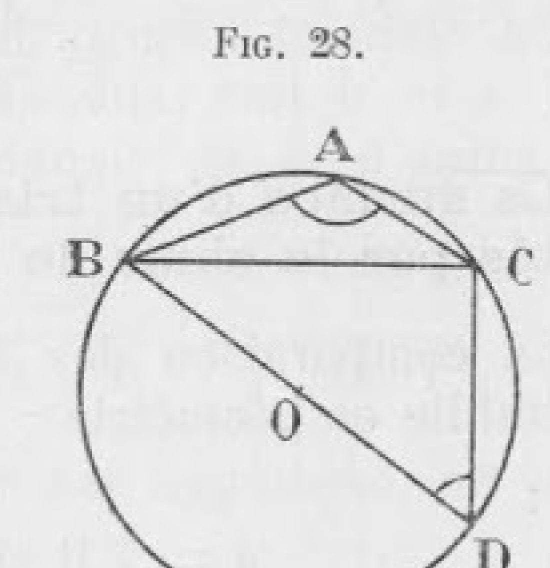


Fig. 29.

113. Seconde démonstration. — Calculons de deux façons une des hauteurs du triangle ABC; par exemple, la hauteur BB′. Si l'angle A est aigu, les triangles ABB′ et CBB′, rectangles en B′, donnent :

$$BB' = AB \sin A = c \sin A;$$

$$BB' = BC \sin C = a \sin C;$$

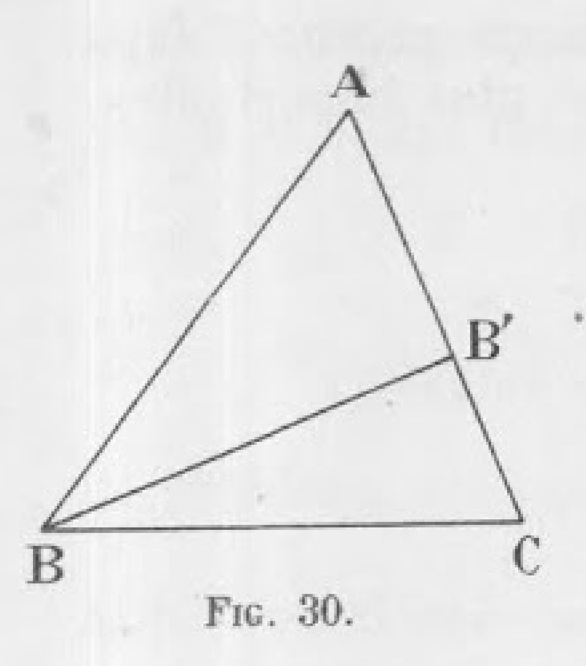


FIG. 30.

en égalant les deux valeurs de BB' :

$$a \sin C = c \sin A.$$

Si l'angle A' est obtus, on a :

$$BB' = AB \sin (200^{gr} - A) = c \sin A;$$
$$BB' = BC \sin C = a \sin C;$$

et, de nouveau :

$$a \sin C = c \sin A.$$

Donc :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

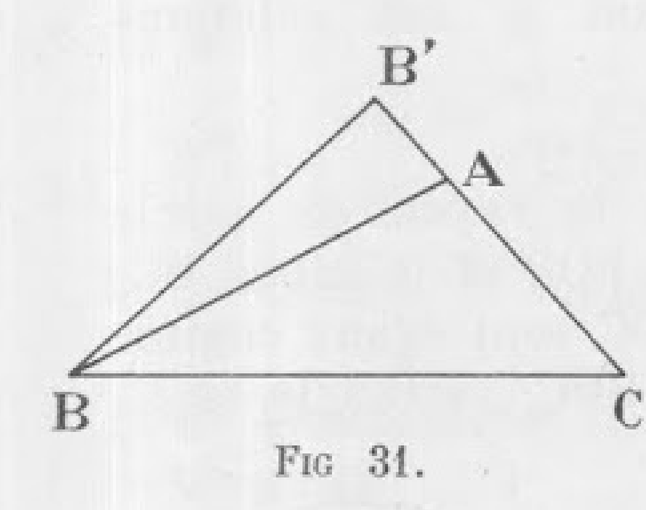


FIG 31.

En prenant la hauteur issue de C, on verrait de même que :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B};$$

donc :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Cette seconde méthode donne une expression importante de la surface du triangle. On a :

$$S = \frac{1}{2} AC \times BB' = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

on aurait aussi :

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

La surface d'un triangle est égale au demi-produit de deux côtés par le sinus de l'angle compris.

La comparaison des deux méthodes donne une relation que l'on a établie en géométrie :

de :

$$a = 2 R \sin A \quad \text{et} \quad 2 S = bc \sin A;$$

on déduit :

$$abc \sin A = 4 RS \sin A,$$

c'est-à-dire :

$$abc = 4 RS.$$

114. Remarque. — Les deux méthodes suivies font partie d'un procédé que l'on emploie souvent pour établir une relation entre les éléments d'une figure : on calcule de deux façons une même grandeur de la figure en fonction des éléments entre lesquels on veut établir une relation, et on égale les deux valeurs obtenues.

Revenons au système (I) :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \\ A + B + C = 200^{gr}. \end{cases}$$

115. ***Les trois relations sont distinctes,*** c'est-à-dire que l'une d'entre elles ne peut pas se déduire des deux autres. La troisième ne peut pas être une conséquence des deux premières, car il faudrait pour l'obtenir éliminer a, b, c, entre celles-ci, ce qui n'est pas possible. Une des premières, par exemple :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

ne peut pas se déduire des deux autres :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad A + B + C = 200 \text{ grades},$$

car elles ne contiennent pas le côté b.

116. Etablissons, maintenant que : ***Réciproquement, si trois longueurs** a, b, c, **et trois angles positifs** A, B, C, **vérifient les relations (I), il existe un triangle et un seul ayant** a, b, c, **pour côtés et** A, B, C, **pour angles.***

A, B, C, étant positifs et leur somme égale à 200^{gr}, la somme B + C est inférieure à 200^{gr}, et nous pouvons construire un triangle A'BC ayant a pour côté et B et C pour angles adjacents; soit b' et c' les longueurs des côtés A'C et A'B. Dans ce triangle on a, d'après le théorème direct :

$$A' + B + C = 200^{gr}; \quad \frac{a}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B} = \frac{c'}{\sin C}.$$

En comparant avec les relations (I) vérifiées par hypothèse, on voit de suite que :

$$A' = A; \quad \text{puis :} \quad b' = b; \quad c' = c.$$

II. Deuxième groupe de relations.

117. Il est formé des relations suivantes :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A; \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B; \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C. \end{cases}$$

Il suffit d'établir la première relation, les deux autres s'en déduisant par permutation circulaire.

Soit ABC le triangle; B′ la projection du sommet B sur le côté CA; nous avons établi en géométrie la relation algébrique :

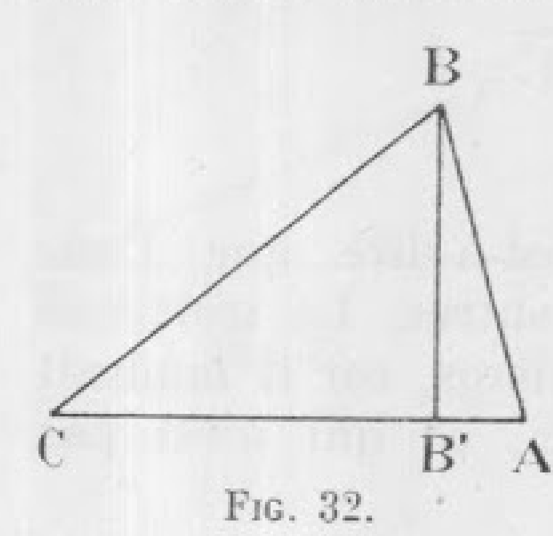


Fig. 32.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AC}.\overline{AB'};$$

si nous prenons, sur les côtés issus de A comme sens positifs les sens AC et AB, le vecteur $\overrightarrow{AB'}$ est la projection sur l'axe CA du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et l'on a :

$$\overline{AB} = c; \qquad \overline{AB'} = \overline{AB} \cos A = c \cos A.$$

En remplaçant dans la relation précédente, on obtient :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

Si le triangle est rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore.

118. ***Les trois relations (II) sont distinctes,*** car chacune contenant un angle qui n'entre pas dans les deux autres ne peut pas se déduire de celles-ci.

119. Réciproquement : ***Si trois longueurs*** a, b, c, ***et trois angles*** A, B, C, ***compris entre 0 et 200 grades vérifient les relations (II), il existe un triangle, et un seul, dont les éléments sont*** a, b, c, A, B, C.

Construisons un triangle AB′C′ ayant pour côtés AB′ et AC′, c et b, et dont l'angle compris est égal à A. Soit a' la longueur du côté B′C′. On a, dans ce triangle :

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A;$$

en comparant avec la première relation (II), on obtient :

$$a'^2 = a^2;$$

d'où : $a' = a$, puisque a' et a sont des longueurs.

On a ensuite :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B';$$

et en comparant avec la seconde relation (II) :

$$\cos B' = \cos B;$$

d'où : B′ = B, puisque entre 0 et 200 grades il n'existe qu'un angle ayant un cosinus donné. On voit, de même, que C′ = C.

III. Troisième groupe de relations.

120. Il est formé des relations suivantes :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \boldsymbol{a = b \cos C + c \cos B;} \\ \boldsymbol{b = c \cos A + a \cos C;} \\ \boldsymbol{c = a \cos B + b \cos A.} \end{cases}$$

Il suffit d'établir une des trois relations; par exemple, la première. Soit A′ le pied de la hauteur issue de A; si A′ se trouve entre B et C, on a :

$$BC = CA' + A'B = CA . \cos C + AB \cos B.$$

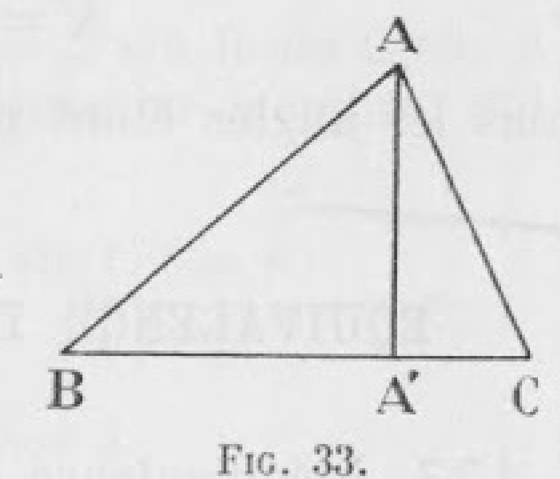


Fig. 33.

Si A′ tombe en dehors de BC, soit à droite de C, on a :

$$\begin{aligned} BC &= BA' - A'C \\ &= AB \cos B - AC \cos (100^{gr} - C) \\ &= AB \cos B + AB \cos C; \end{aligned}$$

de même, si A′ était à gauche de B. Donc, dans tous les cas :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

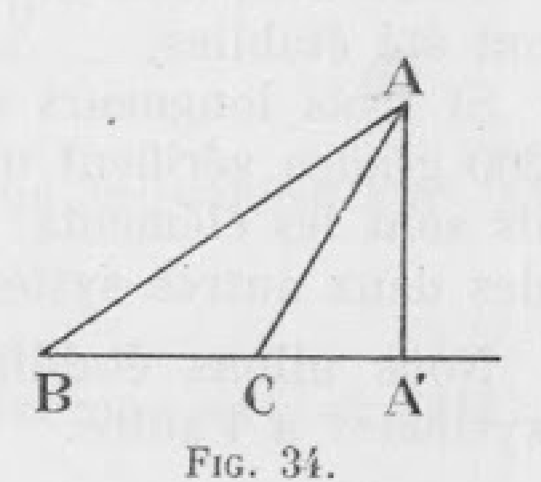


Fig. 34.

121. Les trois relations sont distinctes. — Cherchons à déduire la première relation des deux autres; il faut, pour cela, éliminer cos A qui n'entre pas dans la première relation; multiplions les deux membres de la seconde par $+ b$ et ceux de la troisième par $- c$, et ajoutons; nous obtenons :

$$b^2 - c^2 = a\,(b \cos C - c \cos B),$$

ce qui n'est pas la première relation. Les relations sont distinctes.

122. Montrons que, ***réciproquement, si trois longueurs*** a, b, c, ***et trois angles*** A, B, C, ***vérifient les relations (III), il existe un triangle et un seul, dont ils sont les éléments,*** A, B, C ***étant positifs et inférieurs à 200 grades.***

Il résulte, évidemment, des trois relations, que l'on a :

$$a < b + c; \quad b < c + a; \quad c < a + b.$$

On peut donc construire un triangle A′B′C′, ayant a, b, c, pour côtés; dans ce triangle, on a :

$$\text{(III′)} \quad \begin{cases} a = b \cos C' + c \cos B'; \\ b = c \cos A' + a \cos C'; \\ c = a \cos B' + b \cos A' \end{cases}$$

Ces égalités forment un système de trois équations du premier degré en cos A′, cos B′, cos C′. Il n'est pas indéterminé, puisque les trois équations sont distinctes, et, puisque les relations (III) sont vérifiées, il a une solution et cette solution est unique; donc :

$$\cos A' = \cos A; \quad \cos B' = \cos B; \quad \cos C' = \cos C;$$

d'où l'on déduit :

$$A' = A; \quad B' = B; \quad C' = C;$$

tous les angles étant positifs et inférieurs à 200 grades.

EQUIVALENCE DES TROIS SYSTEMES DE RELATIONS

123. L'équivalence des trois systèmes résulte des réciproques qui ont été établies.

Si trois longueurs a, b, c, et trois angles positifs et inférieurs à 200 grades vérifient un des trois systèmes, il existe un triangle dont ils sont les éléments; or, dans ce triangle, ces éléments vérifient l'un des deux autres systèmes, qui est bien une conséquence du premier.

Nous allons établir, par le calcul, qu'on peut passer d'un des systèmes à l'autre.

124. 1° Du système (I) déduire les systèmes (II) et (III).

Il suffit de déduire du système (I) une des relations de l'un des deux autres.

La relation : $A + B + C = 200^{gr}$ donne :

$$B = 200^{gr} - (A + C),$$

c'est-à-dire :

(1) $$\sin B = \sin (A + C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A.$$

Posons :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k};$$

nous déduisons de là :

$$\sin A = ka; \quad \sin B = kb; \quad \sin C = kc; \qquad (2)$$

et, en remplaçant dans (1) :

$$kb = ka \cos C + kc \cos A;$$

$$b = a \cos C + c \cos B.$$

C'est une relation du groupe (III).

De l'égalité (1) on tire :

$$\sin A \cos C = \sin B - \sin C \cos A;$$

et en élevant les deux membres au carré :

$$\sin^2 A \cos^2 C = \sin^2 B + \sin^2 C \cos^2 A - 2 \sin B \sin C \cos A;$$

ce qui s'écrit :

$$\sin^2 A \cos^2 C = \sin^2 B + \sin^2 C (1 - \sin^2 A) - 2 \sin B \sin C \cos A;$$

et en faisant passer $-\sin^2 C \sin^2 A$ dans le premier membre, puis remplaçant $\cos^2 C + \sin^2 C$ par 1 :

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A;$$

et à cause des valeurs (2) écrites plus haut :

$$k^2a^2 = k^2b^2 + k^2c^2 - 2 k^2bc \cos A;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos A;$$

c'est la première relation du groupe (II).

Remarquons que nous n'avons ici fait aucune hypothèse sur les grandeurs des angles.

125. 2° Du système (II) déduire les systèmes (I) et (III).

Ecrivons le système (II) :

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 bc \cos A; \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2 ac \cos B; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 ab \cos C. \end{aligned} \right.$$

Nous obtenons immédiatement une des relations du groupe (III) en ajoutant membres à membres les deux premières relations (II), ce qui donne :

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2 c^2 - 2 c (a \cos B + b \cos A);$$

et en réduisant, puis divisant par $2c$ qui n'est pas nul :

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

C'est la troisième relation du groupe (III).

126. Déduisons, maintenant, le groupe (I) du groupe (II) et établissons d'abord que :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

en supposant a, b, c, A, B, C, positifs et les angles inférieurs à 200^{gr}.

Il faut éliminer c et C entre les trois équations (II); C est tout éliminé dans les deux premières; éliminons c entre celles-ci :

En les ajoutant, nous avons obtenu :

$$c = a \cos B + b \cos A; \qquad (3)$$

en les retranchant, membres à membres, il vient :

$$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 + 2c\,(a \cos B - b \cos A);$$

c'est-à-dire :

$$a^2 - b^2 = c(a \cos B - b \cos A);$$

remplaçons c par la valeur (3) :

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A)\,(a \cos B - b \cos A)$$

$$= a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A;$$

ce qui donne :

$$a^2\,(1 - \cos^2 B) = b^2\,(1 - \cos^2 A);$$

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A;$$

et, en prenant les racines carrées :

$$a \sin B = b \sin A;$$

puisque si a, b, B et A sont les éléments d'un triangle, les différents facteurs sont positifs. C'est la relation :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B};$$

on obtiendrait d'une façon analogue : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin B}$.

Désignons par k la valeur commune des trois rapports; nous avons :

$$a = k \sin A; \qquad b = k \sin B; \qquad c = k \sin C;$$

remplaçons dans la relation (3) et divisons par k; elle donne :

$$\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

c'est-à-dire :

$$\sin C = \sin (A + B).$$

On a donc : ou bien $C = A + B$, ou bien $C = 200^{gr} - (A + B)$. On verrait, par un calcul analogue que les angles A, B, C, vérifient une des relations :

$$B = A + C; \qquad \text{ou bien :} \quad B = 200^{gr} - (A + C):$$

Or, on ne peut pas avoir, en même temps :

$$C = A + B; \qquad B = A + C;$$

car, en ajoutant, on aurait : $2A = 0$, $A = 0$, et on suppose A positif; il faut donc que l'on ait, dans un des deux cas :

$$A + B + C = 200^{gr}.$$

127. 3° Du groupe (III) déduire les groupes (I) et (II).

Ecrivons le système (III) :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B; \\ b = c \cos A + a \cos C; \\ c = a \cos B + b \cos A. \end{cases}$$

On déduit, de suite, de ces relations la première relation du groupe (II) en les ajoutant membres à membres, après avoir multiplié les deux membres de la première par a, ceux de la seconde par $-b$ et ceux de la troisième par $-c$; ce qui donne :

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A:$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Il n'y a ici aucune hypothèse à faire sur les nombres.

Ajoutons, membres à membres, les deux premières relations, après avoir multiplié par a les deux membres de la première et par $-b$ ceux de la seconde; nous obtenons :

$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A);$$

puis, remplaçons c par sa valeur donnée par la troisième :

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A)\,(a \cos B - b \cos A)$$

$$= a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A;$$

et tout le calcul s'achève comme nous l'avons fait pour passer du groupe (II) au groupe (I).

Remarque. — On peut former d'autres groupes de relations distinctes entre les éléments d'un triangle, soit en prenant trois relations dans les groupes précédents, soit en y remplaçant une ou deux d'entre elles par des relations équivalentes, mais ils sont moins utilisés.

RESOLUTION D'UN TRIANGLE QUELCONQUE DANS LES CAS CLASSIQUES

128. Il y a quatre cas classiques de résolution d'un triangle quelconque correspondant aux quatre cas de construction qui ont été étudiés en géométrie. Il sera bon de revoir ces problèmes de géométrie.

129. Premier cas. — ***Résoudre un triangle connaissant un côté et les deux angles adjacents,*** soit a, B et C; les inconnues sont b, c, A et la surface S du triangle.

Nous utiliserons les relations du groupe (I) :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad A + B + C = 200^{gr}.$$

La dernière donne : $A = 200^{gr} - (B + C)$, et détermine A à condition que l'on ait : $B + C < 200^{gr}$.

On a ensuite :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)};$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}$$

qui donnent pour b et c des valeurs positives. Enfin :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C \sin A}{\sin^2 (B + C)} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin (B + C)}.$$

130. Deuxième cas. — ***Résoudre un triangle connaissant un angle et les deux côtés adjacents à cet angle, soit*** A, b ***et*** c.

Les inconnues sont B, C, a et la surface S.

Cette dernière est immédiatement donnée par :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Partons encore du groupe (I); il donne, pour calculer B et C, les deux équations :

$$B + C = 200^{gr} - A; \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c},$$

qui forment un système que nous avons appris à résoudre.

Ecrivons

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B - \sin C}{b - c} = \frac{\sin B + \sin C}{b + c},$$

d'où :
$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{b - c}{b + c};$$

et, en transformant en produits les deux termes de la première fraction :

$$\frac{2 \sin \frac{B - C}{2} \cos \frac{B + C}{2}}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}} = \frac{b - c}{b + c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B + C}{2}};$$

ce qui donne :

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tg} \frac{B + C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

puisque $\frac{B + C}{2} = 100^{gr} - \frac{A}{2}$. Nous pouvons toujours supposer $b \geqslant c$ et, par suite, $B \geqslant C$; le second membre de l'égalité est positif et détermine un angle α et un seul, compris entre 0 et 100^{gr}, et tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Et comme $\frac{B - C}{2}$ est évidemment aussi aigu, on a :

$$\frac{B - C}{2} = \alpha,$$

qui, avec :
$$\frac{B + C}{2} = 100^{gr} - \frac{A}{2}$$

détermine B et C :
$$B = 100^{gr} + \alpha - \frac{A}{2};$$

$$C = 100^{gr} - \alpha - \frac{A}{2}.$$

On a ensuite :
$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

La condition de possibilité est que l'angle C soit positif, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\alpha < 100^{gr} - \frac{A}{2};$$

ou : $$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

$$\frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2} < \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

condition vérifiée, puisque : $\frac{b-c}{b+c} < 1$.

131. Remarque. — Si on demandait de rendre calculable par logarithmes la valeur de tg α, on écrirait :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{b}} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$ et on poserait : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{b}$, qui détermine

un angle φ inférieur à 50^{gr}, puisque $c < b$.

On aurait alors :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} \cdot \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = \operatorname{tg} (50^{gr} - \varphi) \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

132. Troisième cas. — ***Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, soit a, b et*** A; les inconnues sont B, C, c, et la surface S.

Nous utiliserons encore le groupe (I) :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad A + B + C = 200^{gr}.$$

L'angle B est déterminé par :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}. \qquad (1)$$

On a ensuite : $$C = 200^{gr} - A - B; \qquad (2)$$

$$c = \frac{a \sin A}{\sin C} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C. \qquad (3)$$

133. Discussion. — Pour que l'équation (1) détermine un angle B, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\frac{b \sin A}{a} \leqslant 1 \qquad b \sin A \leqslant a.$$

Dans le cas où $\frac{b \sin A}{a} = 1$, on a : $B = 100^{gr}$; le triangle est rectangle en B, le problème a été traité précédemment. Supposons donc :

$$b \sin A < a.$$

L'équation (1) détermine deux angles supplémentaires, l'un B′ aigu, l'autre $B'' = 200^{gr} - B'$ obtus. Il faut alors que l'équation (2) donne pour C un angle positif. Nous sommes conduits à distinguer deux cas.

1° ***L'angle*** A ***est aigu.*** — Alors, $200^{gr} - A$ est obtus, et l'angle B′ convient; l'égalité (3) détermine pour c une valeur positive.

Pour que l'angle B″ donne une solution, il faut que l'on ait :

$$B'' < 200^{gr} - A; \quad \text{ou :} \quad A < 200^{gr} - B'';$$

et comme les deux angles A et $200^{gr} - B''$ sont aigus :

$$\sin A < \sin B'';$$

en remplaçant sin B″ par sa valeur :

$$\sin A < \frac{b \sin A}{a},$$

c'est-à-dire : $$1 < \frac{b}{a}, \qquad a < b.$$

2° ***L'angle*** A ***est obtus ou droit.*** — Dans ce cas, $200^{gr} - A$ est aigu, et l'angle B″ ne peut pas convenir. L'angle B′ conviendra si

$$B' < 200^{gr} - A,$$

c'est-à-dire :

$$\sin B' < \sin A; \quad \frac{b \sin A}{a} < \sin A; \quad \frac{b}{a} < 1, \quad \text{et} \quad b < a.$$

En résumé : Le problème n'a de solutions que si :

$$b \sin A \leqslant a.$$

Si $b < a$, il a une seule solution, que A soit aigu, droit, ou obtus.

Si $a < b$, il a deux solutions si A est aigu; aucune, si A est obtus ou droit.

134. Quatrième cas. — ***Résoudre un triangle connaissant les trois côtés** a, b, c.* Les inconnues sont les angles et la surface.

Nous utiliserons le groupe (II) et calculerons $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$; les tangentes des deux autres angles s'en déduiront par permutation circulaire. La relation :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$$

donne :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

Nous déduisons de là :

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2\,bc}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,bc} =$$

$$= \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2\,bc};$$

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2\,bc}{2\,bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,bc} =$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2\,bc}.$$

Désignons par $2\,p$ le périmètre du triangle :

$$a + b + c = 2\,p;$$

nous avons :

$$b + c - a = a + b + c - 2\,a = 2\,(p - a);$$

de même : $a + c - b = 2\,(p - b);$

et : $a + b - c = 2\,(p - c);$

et en portant dans les deux valeurs écrites plus haut :

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{4\,(p - b)(p - c)}{2\,bc};$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{4\,p\,(p - a)}{2\,bc};$$

et en divisant membres à membres :

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{(p - b)(p - c)}{p\,(p - a)};$$

et comme $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ est positive :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p\,(p - a)}}.$$

Par permutations :

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - c)(p - a)}{p(p - b)}}; \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{p(p - c)}}.$$

Pour que ces valeurs soient acceptables, il faut et il suffit que l'on ait :

$$p(p - a)(p - b)(p - c) > 0;$$

c'est-à-dire :

$$(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) > 0.$$

Or, deux des facteurs ne peuvent pas être négatifs en même temps, car si l'on avait :

$$b + c - a < 0;$$

$$a + c - b < 0;$$

on en déduirait par addition :

$$2\,c < 0;$$

ce qui est impossible. Donc, la condition sera remplie si les trois facteurs sont positifs, ce qui donne :

$$a < b + c; \qquad b < c + a; \qquad c < a + b.$$

C'est la condition d'existence du triangle que l'on a trouvée en géométrie.

Les trois angles A, B, C sont alors positifs et inférieurs à 200gr : c'est la condition pour que le groupe (II) détermine un triangle et un seul.

La surface S du triangle est donnée par :

$$S = \frac{1}{2}\,bc\sin A.$$

Des relations (1) on tire :

$$4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \sin^2 2\,A = \frac{4\,p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2c^2};$$

$$\sin 2\,a = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)};$$

et :

$$\mathbf{S} = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}.$$

On peut donner aux valeurs obtenues pour les tangentes des demi-angles du triangle d'autres formes très utiles.

Posons : $$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p};$$

nous aurons :

$$\text{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)^2} = \frac{r^2}{(p-a)^2};$$

d'où :

$$\text{tg}\,\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2}} = \frac{r}{p-a}, \text{ puis : } \text{tg}\,\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \text{tg}\,\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Il n'est pas difficile de voir que r est le rayon du cercle inscrit dans le triangle. On a vu, en géométrie, que si P est le point de contact du cercle inscrit avec le côté AB, on a :

$$AP = p - a.$$

Si I est le centre du cercle, le triangle API, rectangle en P, donne :

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \frac{IP}{AP} = \frac{r}{p-a},$$

r étant le rayon, ce qui établit la proposition. L'expression de la surface s'écrit :

Fig. 35.

$$S = \sqrt{\frac{p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$
$$= p\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = pr;$$

et nous retrouvons une formule établie en géométrie.

Si on se rappelle que la distance du sommet A au point de contact du cercle exinscrit dans l'angle A et du côté AB est égal à p, on voit de la même façon que plus haut que :

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \frac{r'}{p}; \text{ de même : } \text{tg}\,\frac{B}{2} = \frac{r''}{p}, \quad \text{tg}\,\frac{C}{2} = \frac{r'''}{p},$$

r', r'', r''' étant les rayons des trois cercles exinscrits dans les angles A, B, C; on a aussi :

$$S = (p-a)r' = (p-b)r'' = (p-c)r''';$$

qui donnent les valeurs des rayons r', r'', r''', en fonction des côtés.

Enfin, le rayon R du cercle circonscrit est donné par :

$$R = \frac{abc}{4\,S};$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Nous allons, dans ce qui va suivre, trouver d'autres expressions de ces différents rayons.

CALCUL DE QUELQUES ELEMENTS D'UN TRIANGLE EN FONCTION DES COTES ET DES ANGLES

135. ***Cercle circonscrit.*** — Nous savons que son rayon R est donné par :

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}.$$

136. ***Rayon du cercle inscrit.*** — Soit T le point de contact du cercle inscrit I et du côté BC, les triangles rectangles BIT et CIT donnent :

$$BT = r\,\text{cotg}\,\frac{B}{2} \qquad TC = r\,\text{cotg}\,\frac{C}{2},$$

et en ajoutant :

$$a = r\left(\text{cotg}\,\frac{B}{2} + \text{cotg}\,\frac{C}{2}\right),$$

Fig. 36.

ce qui s'écrit encore :

$$a = r\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right) = \frac{r\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

et l'on a :

$$r = \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

On obtient, par permutation :

$$r = \frac{b \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \qquad r = \frac{c \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

137. ***Rayons des cercles exinscrits.*** — Calculons le rayon r' du cercle exinscrit dans l'angle A.

Soit T' le point de contact de ce cercle avec le côté BC et I' le centre

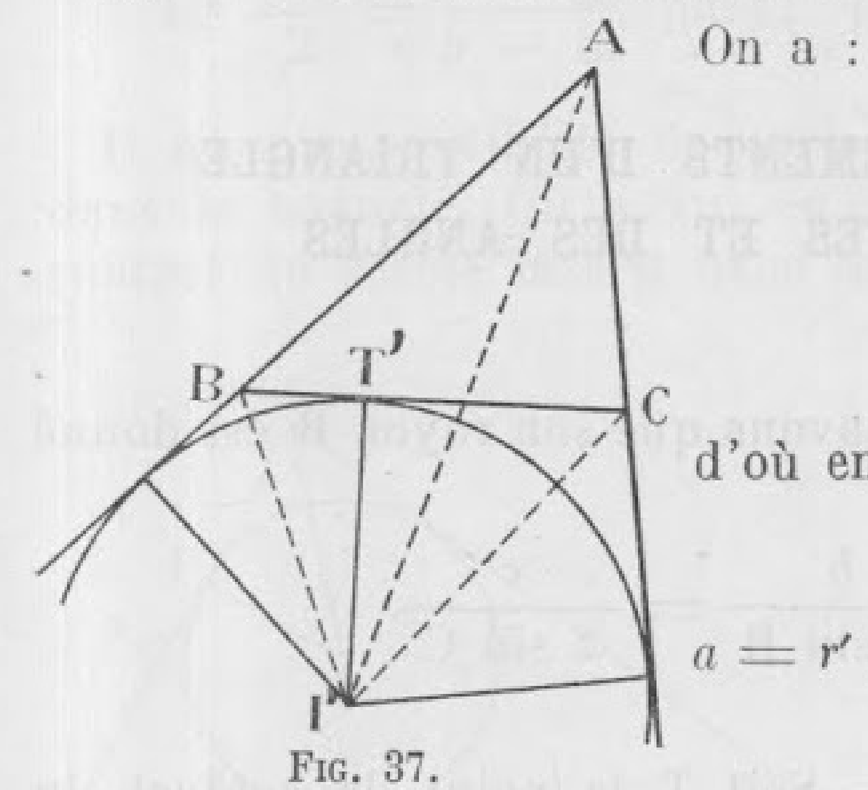


Fig. 37.

On a :

$$BT' = r' \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right)$$

$$T'C = r' \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

d'où en ajoutant :

$$a = r'\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = r' \frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

d'où :

$$r' = \frac{a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

on obtiendra r'' et r''' par permutation circulaire :

$$r'' = \frac{b \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \qquad r''' = \frac{c \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

On pourrait aussi calculer r'' et r''' en fonction de a et des angles, en remplaçant b et c respectivement par :

$$\frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

138. ***Calcul des bissectrices intérieures.*** — Cherchons une relation entre la bissectrice intérieure de l'angle A, les côtés b, c et l'angle A, en appliquant la méthode que nous avons indiquée plus haut. Désignons par α la longueur de cette bissectrice AD et égalons deux expressions de la surface S du triangle.

Cette surface est la somme des surfaces des deux triangles BDA et CDA :

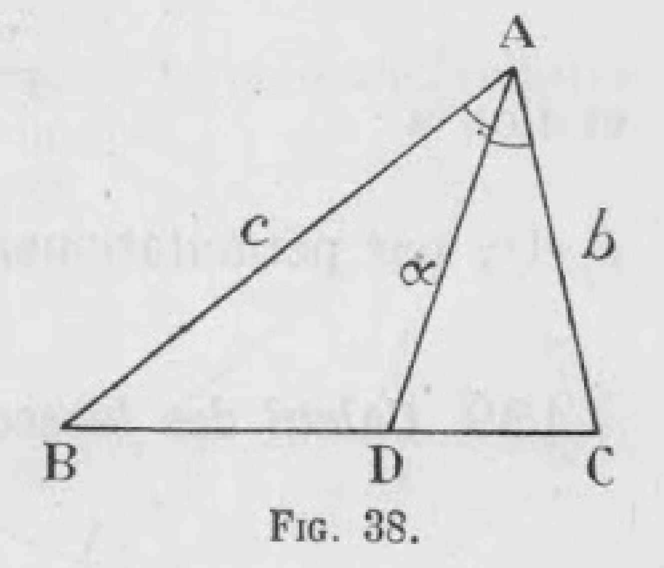


Fig. 38.

$$S = \frac{1}{2}\alpha c \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\alpha b \sin\frac{A}{2};$$

et on a aussi :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

donc :

$$\frac{1}{2}\alpha(b+c)\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2}\left[2 bc \sin\frac{A}{2}\right]\cos\frac{A}{2},$$

et en divisant par $\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}$:

$$\alpha(b+c) = 2bc\cos\frac{A}{2};$$

d'où :

$$\alpha = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

On trouverait, de même, pour les bissectrices intérieures des angles B et C :

$$\beta = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{c+a} \qquad \gamma = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

Si l'on voulait α en fonction du côté a et des angles, il suffit de remplacer b et c par leurs valeurs :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A};$$

on obtient :

$$\alpha = \frac{2a^2 \sin B \sin C \cos\frac{A}{2}}{a(\sin B + \sin C)\sin A} = \frac{a \sin B \sin C}{(\sin B + \sin C)\sin\frac{A}{2}},$$

que l'on peut mettre sous une autre forme en transformant $\sin B + \sin C$ en produit :

$$(\sin B + \sin C)\sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} =$$

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2},$$

et l'on a : $$\alpha = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A \cos \frac{B - C}{2}},$$

β et γ par permutations.

139. ***Calcul des bissectrices extérieures.*** — Supposons $c > b$ et, par suite, $C > B$, on écrit que si AD′ est la bissectrice extérieure de l'angle A, la surface du triangle est la différence des surfaces des deux triangles BAD′ et CAD′; on a, en désignant par α' la longueur de la bissectrice :

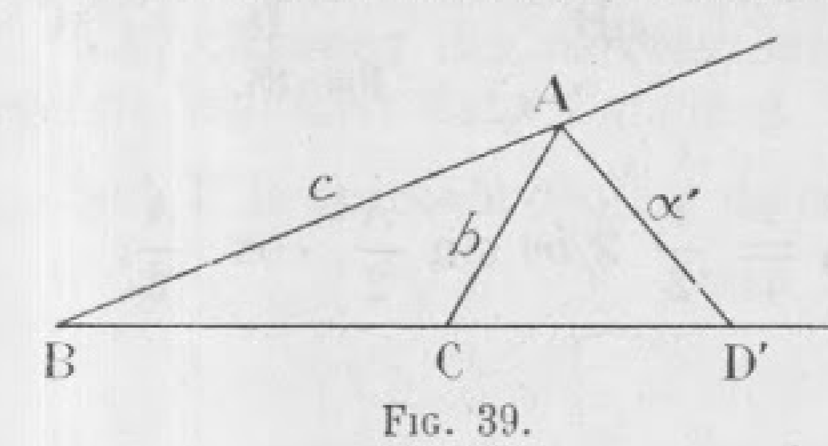


Fig. 39.

$$\frac{1}{2}\,\alpha' c \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\alpha' b \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\,bc \sin A;$$

d'où : $$\alpha'(c - b) \cos\frac{A}{2} = bc \sin A;$$

$$\alpha' = \frac{2\,bc \sin\frac{A}{2}}{c - b};$$

les deux autres bissectrices extérieures se calculent d'une façon analogue.

140. ***Calcul des hauteurs.*** — Soit h_a la hauteur relative au côté BC; en égalant deux valeurs de la surface du triangle, nous obtenons :

$$ah_a = bc \sin A;$$

d'où : $$h_a = \frac{bc \sin A}{a}.$$

Si l'on veut h_a en fonction du côté a et des angles, il suffit de remplacer b et c par leurs valeurs :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}; \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Il vient, après réductions immédiates :

$$h_a = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A};$$

de même : $$h_b = \frac{b \sin C \sin A}{\sin B}, \quad h_c = \frac{c \sin A \sin B}{\sin C}.$$

141. ***Calcul des médianes.*** — Soit $AM = m_a$ la médiane relative au côté BC; prolongeons AM d'une longueur $MD = AM$, le triangle ABD a pour côtés c, b et $2\,m_a$, et pour angle en B : $B + C$, et donne :

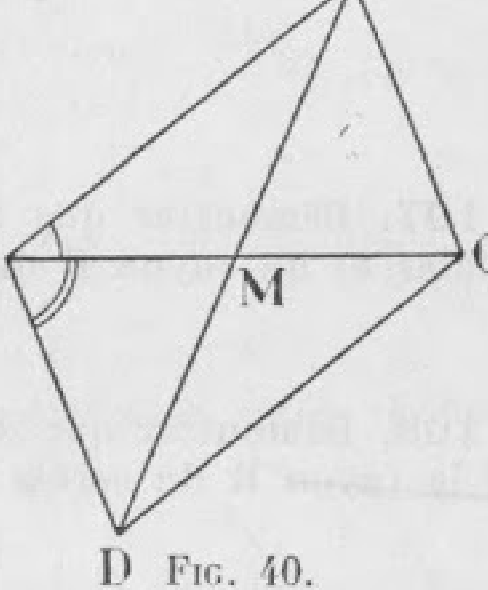


Fig. 40.

$$4\,m_a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos(B + C);$$
$$= b^2 + c^2 + 2\,bc \cos A.$$

Si l'on voulait calculer m_a en fonction des angles et du côté a seulement, on remplacerait b et c par leurs valeurs écrites plus haut :

$$4\,m_a^2 = \frac{a^2 (\sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos A)}{\sin^2 A}.$$

EXERCICES

101. Démontrer que les angles d'un triangle vérifient les relations :

$$\frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B - \cos C \cos A}{\sin C \sin A} + \frac{\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = 1.$$

102. Démontrer que dans tout triangle on a :

$$\frac{(b^2 - c^2) \cos A}{a} + \frac{(c^2 - a^2) \cos B}{b} + \frac{(a^2 - b^2) \cos C}{c} = 0.$$

103. Démontrer que dans un triangle de périmètre $2\,p$ les côtés sont donnés par les formules :

$$a = \frac{p \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}, \quad b = \frac{p \sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2} \cos\frac{C}{2}}, \quad c = \frac{p \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2}}.$$

104. Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont données en fonction du périmètre $2\,p$ et des angles par les formules :

$$h_a = \frac{2p \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \quad h_b = \frac{2p \sin\frac{C}{2} \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}, \quad h_c = \frac{2p \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

105. Démontrer la relation :

$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

S étant la surface et p le demi-périmètre d'un triangle ABC.

106. Démontrer que dans un triangle quelconque le rayon R du cercle circonscrit a pour valeur :

$$R = \frac{p}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

107. Démontrer que la surface S d'un triangle est donnée en fonction des angles et du rayon R du cercle circonscrit par la formule :

$$S = 2\,R^2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C.$$

108. Démontrer que dans un triangle quelconque le rayon r du cercle inscrit et le rayon R du cercle circonscrit vérifient la relation :

$$r = 4\,R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

109. Soit h_a la hauteur issue du sommet A d'un triangle ABC, r le rayon du cercle inscrit; démontrer la formule :

$$r = \frac{h_a \sin \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

110. Démontrer que les rayons r', r'', r''', des cercles exinscrits, dans les angles A, B, C, d'un triangle ABC, sont donnés en fonction des angles et du rayon r du cercle inscrit par les formules :

$$r' = r \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}, \qquad r'' = r \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}, \qquad r''' = r \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

111. Démontrer les relations :

$$r' = \frac{h_a \sin \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{h_b \cos \frac{B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{h_c \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

r' étant le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A d'un triangle ABC, h_a, h_b, h_c, les hauteurs issues des sommets A, B, C.

112. Soit ABC un triangle dans lequel on suppose l'angle B plus grand que l'angle C, M l'angle aigu que fait la médiane AM avec le côté a, démontrer la relation :

$$2 \operatorname{cotg} M = \operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B.$$

113. Démontrer que si dans un triangle on a :

$$\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A,$$

le triangle est isocèle.

114. Démontrer que si, dans un triangle, on a :

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C},$$

le triangle est rectangle ou isocèle.

115. Démontrer que si dans un triangle on a :

$$\frac{2 \sin A \sin B}{\sin C} = \operatorname{cotg} \frac{C}{2},$$

le triangle est isocèle.

116. Démontrer que si, dans un triangle, on a :

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C},$$

le triangle est rectangle en A.

117. Démontrer que si l'angle A d'un triangle vaut 120°, les côtés vérifient la relation :

$$b\,(a^2 - b^2) = c\,(a^2 - c^2).$$

118 Démontrer que si les angles d'un triangle vérifient la relation :

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8},$$

le triangle est équilatéral.

119. Dans un triangle ABC, l'orthocentre H est au tiers de la hauteur AA' issue de A à partir du côté BC. Démontrer les relations :

$$\operatorname{tg} B \,.\, \operatorname{tg} C = 3; \qquad 2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C; \qquad \cos (B - C) = 2 \cos A.$$

120. Dans un triangle ABC, la médiane AM est égale au côté AB. Démontrer les relations :

$$\operatorname{tg} B = 3 \operatorname{tg} C; \qquad 2 \sin (B - C) = \sin A.$$

121. Démontrer que si, dans un triangle, on a :

$$(p - b) \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = p \operatorname{tg} \frac{B}{2},$$

le triangle est isocèle.

122. Démontrer que si, dans un triangle, on a :

$$a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a + b) \operatorname{tg} \frac{A + B}{2},$$

le triangle est isocèle.

123. Démontrer que si, dans un triangle, on a :

$$\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2; \qquad \text{avec :} \qquad \sin B \sin C = \frac{3}{4},$$

le triangle est équilatéral.

124. Démontrer que, dans un triangle ABC, rectangle en A, on a :

$$c \cos 2\,B + b \sin 2\,B = c.$$

CHAPITRE X

RÉSOLUTION DE TRIANGLES DANS DES CAS NON CLASSIQUES

142. Les cas non classiques de résolution de triangles sont ceux où l'on donne d'autres grandeurs que des côtés ou des angles; en général, un triangle est déterminé dès que l'on donne trois quantités indépendantes dont une au moins est une longueur.

Pour résoudre le triangle, on exprimera chacune des données en fonction des éléments du triangle et, en adjoignant aux relations obtenues trois des relations des groupes (I) ou (II) convenablement choisies, on obtiendra un nombre suffisant d'équations pour calculer les éléments inconnus.

Il y a, le plus souvent, avantage à commencer par le calcul des angles, car, s'ils sont connus, les côtés se calculent facilement. S'il arrive que deux angles entrent symétriquement dans les équations obtenues, il y a avantage à déterminer leur somme et leur différence; si le troisième angle joue un rôle particulier, il est commode de le déterminer d'abord, puis de calculer la somme et la différence des deux autres.

On peut, aussi, commencer par le calcul des côtés; on est alors conduit à un problème d'algèbre où peuvent entrer des calculs trigonométriques quand des angles font partie des données; la résolution est souvent moins rapide que si on commençait par calculer les angles.

Nous allons traiter quelques exemples simples pour éclairer ces généralités.

143. Problème. — ***Résoudre un triangle connaissant un côté*** a, ***l'angle opposé*** A ***et la somme*** $b + c = l$ ***des deux autres côtés.***

Nous connaissons la somme :

$$B + C = 200^{gr} - A.$$

Calculons la différence B — C; les relations des sinus donnent :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{l}{\sin B + \sin C};$$

d'où :
$$\sin B + \sin C = \frac{l \sin A}{a};$$

et, en transformant le premier membre en produit :

$$2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{l \sin A}{a};$$

ce qui s'écrit :

$$2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{2\,l}{a} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2};$$

et donne :
$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{l}{a} \sin \frac{A}{2}. \qquad (1)$$

Déterminons l'angle aigu α, tel que :

$$\cos \alpha = \frac{l}{a} \sin \frac{A}{2}.$$

Nous avons :
$$\frac{B-C}{2} = \alpha$$

qui, avec :
$$\frac{B+C}{2} = 100^{gr} - \frac{A}{2},$$

détermine B et C :

$$B = 100^{gr} - \frac{A}{2} + \alpha; \qquad C = 100^{gr} - \frac{A}{2} - \alpha. \qquad (2)$$

Nous aurons ensuite :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}; \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Discussion. — Le calcul de l'angle α par l'égalité (1) donne d'abord la condition :

$$a \geqslant l \sin \frac{A}{2}.$$

On doit exprimer ensuite que les angles B et C donnés par les formules (2) sont positifs et inférieurs à 200^{gr}. Or, la somme des angles étant égale à 200^{gr} — A est inférieure à 200^{gr}, et l'angle B est positif; il suffit d'écrire que l'angle C est positif, c'est-à-dire que :

$$\alpha < 100^{gr} - \frac{A}{2};$$

ce qui s'écrit :
$$\cos \alpha > \sin \frac{A}{2};$$

et, en remplaçant cos α par sa valeur :

$$\frac{l}{a}\sin\frac{A}{2} > \sin\frac{A}{2};$$

$$l > a,$$

condition géométrique d'existence du triangle; ainsi, on doit avoir :

$$l\sin\frac{A}{2} \leqslant a < l;$$

les côtés b et c sont alors positifs.

144. Problème. — ***Résoudre un triangle connaissant l'angle*** A, ***la hauteur h_a et la bissectrice α issues du sommet*** A.

Soit AA′ et AD la hauteur et la bissectrice issues du sommet A du triangle ABC.

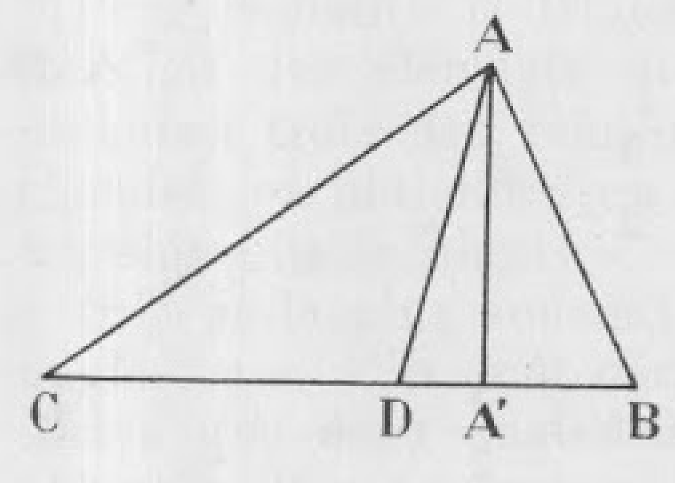


Fig. 41.

Les triangles ABD et ACD donnent :

$$\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\alpha}{\sin B}, \quad \frac{DC}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\alpha}{\sin C};$$

d'où :

$$BD = \frac{\alpha\sin\frac{A}{2}}{\sin B}; \quad DC = \frac{\alpha\sin\frac{A}{2}}{\sin C};$$

et, en ajoutant :

$$BD + DC = a = \alpha\sin\frac{A}{2}\,\frac{(\sin B + \sin C)}{\sin B\sin C};$$

$$a\sin B\sin C = \alpha\sin\frac{A}{2}\,(\sin B + \sin C); \qquad (1)$$

on a ensuite :

$$b\sin C = h_a; \qquad (2)$$

et en adjoignant à ces deux égalités les relations du groupe (I) :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}; \qquad (3)$$

$$A + B + C = 200^{gr}. \qquad (4)$$

Nous obtenons un système de cinq équations à cinq inconnues pour calculer B, C, a, b, c.

Commençons par le calcul des angles B et C. Divisons membres à membres les égalités (1) et (2) :

$$\frac{a\sin B\sin C}{b\sin C} = \frac{\alpha}{h_a}\sin\frac{A}{2}\,(\sin B + \sin C).$$

Or : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B} = \dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin B}$, $\quad \sin B + \sin C =$

$$2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2};$$

en remplaçant, on obtient :

$$\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin B\sin C}{\sin B\sin C} = 2\frac{\alpha}{h_a}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2};$$

et, en réduisant : $\quad 1 = \dfrac{\alpha}{h_a}\cos\dfrac{B-C}{2};$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{h_a}{\alpha}.$$

Remarquons qu'on aurait pu écrire, de suite, cette équation, si on avait su que l'angle de la hauteur et de la bissectrice est égal à $\frac{B-C}{2}$ (Voir Géométrie de Seconde, exercice 12).

Déterminons un angle φ, tel que :

$$\cos\varphi = \frac{h_a}{\alpha}; \qquad (5)$$

comme nous pouvons toujours supposer B > C, nous aurons :

$$\frac{B-C}{2} = \varphi,$$

qui, avec : $\quad \dfrac{B+C}{2} = 100^{gr} - \dfrac{A}{2}$

détermine B et C :

$$B = 100^{gr} - \frac{A}{2} + \varphi, \qquad C = 100^{gr} - \frac{A}{2} - \varphi; \qquad (6)$$

B et C étant connus, les côtés seront donnés par :

$$b = \frac{h_a}{\sin C}, \quad c = \frac{h_a}{\sin B}, \quad a = \frac{b\sin A}{\sin B} = \frac{h_a\sin A}{\sin B\sin C}. \qquad (7)$$

Discussion. — L'équation (5) déterminera l'angle φ à condition que l'on ait :

$$h_a \leqslant a;$$

l'angle B donné par (6) est positif et inférieur à 200^{gr}; C sera positif si :

$$\varphi < 100^{gr} - \frac{A}{2},$$

c'est-à-dire: $\cos\varphi > \sin\frac{A}{2}$

ou : $\dfrac{h_a}{a} > \sin\dfrac{A}{2}$; $\quad a \sin\dfrac{A}{2} < h_a.$

Ces conditions remplies, les égalités (6) donneront pour a, b, c, des valeurs positives.

En résumé, pour que le triangle existe, il faut que l'on ait :

$$a \sin\frac{A}{2} < h_a \leqslant a.$$

145. Problème. — ***Résoudre un triangle connaissant un côté a, la somme $b + c = l$, des deux autres côtés, et la hauteur h_a relative au côté a.***

L'angle A jouant un rôle particulier en raison des données, nous commencerons par le calculer. Une formule établie dans le quatrième cas de résolution donne :

$$\text{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}.$$

Or, on a, par hypothèse :

$$2p = a + l, \qquad p = \frac{a+l}{2}, \qquad p - a = \frac{l-a}{2};$$

puis : $$ah_a = 2pr = (a+l)r;$$

$$r = \frac{ah_a}{l+a};$$

donc : $$\text{tg}\frac{A}{2} = \frac{2ah_a}{(l+a)(l-a)}$$

qui détermine $\frac{A}{2}$ à condition que l'on ait : $l > a$.

Connaissant l'angle A, on est ramené au premier problème traité comme exemple; résoudre un triangle connaissant A, a et $b + c = l$.

146. Problème. — ***Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre $2p$, et la hauteur h relative à l'hypoténuse.***

Les relations entre les côtés et les angles d'un triangle rectangle donnent :

$$b = \frac{h}{\sin C}, \qquad c = \frac{h}{\sin B}, \qquad a = \frac{bc}{h} = \frac{h}{\sin B \,.\, \sin C}.$$

Commençons par le calcul des angles. Ajoutons, membres à membres, les trois égalités; nous obtenons :

$$2p = h\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} + \frac{1}{\sin B \sin C}\right);$$

d'où : $$\frac{\sin B + \sin C + 1}{\sin B \sin C} = \frac{2p}{h}. \tag{1}$$

L'angle A étant droit, nous pouvons écrire, d'après une relation connue :

$$\sin B + \sin C + 1 = \sin B + \sin C + \sin A = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

d'autre part :

$$\sin B \sin C = 4 \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

en remplaçant dans (1), et en réduisant, il reste :

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{p}{h}.$$

Le dénominateur du premier membre peut s'écrire :

$$\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2};$$

et l'on a, pour calculer $\frac{B-C}{2}$, l'équation :

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}} = \frac{p}{h};$$

d'où l'on tire, en observant que $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{(h+p)\sqrt{2}}{2p}.$$

Soit α l'angle aigu défini par :

$$\cos\alpha = \frac{(h+p)\sqrt{2}}{2\,p}\,; \qquad (2)$$

B et C sont déterminés par les deux équations :

$$\frac{B-C}{2} = \alpha; \qquad \frac{B+C}{2} = 50^{gr},$$

qui donnent : $\quad B = 50^{gr} + \alpha; \qquad C = 50^{gr} - \alpha.$

Les côtés sont ensuite donnés par les trois égalités du début.

Discussion. — Pour que l'angle α existe, il faut que l'on ait

$$\frac{(h+p)\sqrt{2}}{2\,p} \leqslant 1\,;$$

ce qui s'écrit : $\quad h\sqrt{2} \leqslant p(2-\sqrt{2});$

$$h \leqslant p(\sqrt{2}-1).$$

Il n'y a pas d'autres conditions. En effet, la somme des deux angles B et C est égale à 100 grades, l'angle B est évidemment positif et il en est de même de l'angle C, puisque l'égalité (2) montre que l'angle α est plus petit que 50 grades; d'ailleurs, les valeurs des trois côtés sont positives : le triangle peut donc toujours être construit.

147. Quadrilatère convexe inscriptible.

A la résolution des triangles se rattache le calcul des éléments d'un quadrilatère convexe inscriptible dont on donne les quatre côtés.

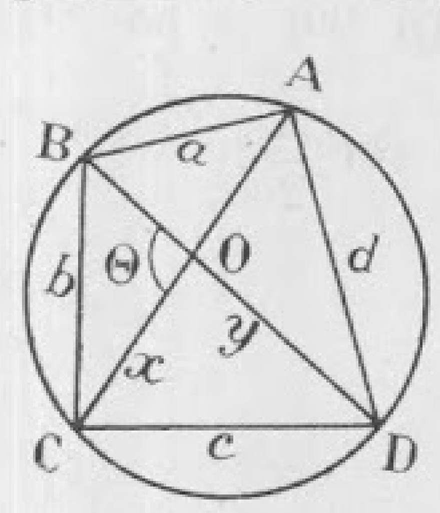


Fig. 42.

Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de rayon R; a, b, c, d, les longueurs des côtés consécutifs AB, BC, CD, DA; x et y les longueurs des diagonales AC et BD, $2\,p$ le périmètre :

$$2\,p = a + b + c + d.$$

Proposons-nous de calculer les angles A, B, C, D, du quadrilatère.

Ecrivons le carré de la diagonale AC dans les deux triangles ABC et ADC :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos B:$$

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd\cos D = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos B:$$

puisque les deux angles B et D sont supplémentaires

En égalant les deux valeurs de x^2, nous obtenons, pour calculer cos B, l'équation :

$$a^2 + b^2 - 2\,ab\cos B = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos B;$$

qui donne : $\quad \cos B = \dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)}.$

Pour avoir une formule calculable par logarithmes, opérons comme dans le quatrième cas de résolution des triangles.

Formons :

$$1 - \cos B = \frac{2\,ab + 2\,cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2\,(ab+cd)}$$

$$= \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{2\,(ab+cd)},$$

c'est-à-dire :

$$1 - \cos B = \frac{(c+d+a-b)\,(c+d-a+b)}{2\,(ab+cd)}. \qquad (1)$$

De même :

$$1 + \cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2+2\,ab+2\,cd}{2\,(ab+cd)}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2\,(ab+cd)},$$

c'est-à-dire :

$$1 + \cos B = \frac{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)}{2\,(ab+cd)}, \qquad (2)$$

Or :

$$b+c+d-a = a+b+c+d-2a = 2p-2a = 2(p-a);$$

$$a+c+d-b = 2(p-b);$$

$$a+b+d-c = 2(p-c);$$

$$a+b+c-d = 2(p-d).$$

Les relations (1) et (2) s'écrivent alors :

$$2\sin^2\frac{B}{2} = \frac{4\,(p-a)\,(p-b)}{2\,(ab+cd)}; \qquad 2\cos^2\frac{B}{2} = \frac{4\,(p-c)\,(p-d)}{2\,(ab+cd)};$$

d'où, en divisant membres à membres :

$$\mathrm{tg}^2\frac{B}{2} = \frac{(p-a)\,(p-b)}{(p-c)\,(p-d)}. \qquad (3)$$

Si l'on observe que les côtés a et b qui entrent au numérateur sont ceux qui comprennent l'angle B, on trouvera de la même façon :

$$\text{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}. \qquad (4)$$

Les deux relations (3) et (4) déterminent les angles B et A, et, par suite, leurs suppléments C et D.

Pour que le calcul soit possible, il faut et il suffit que les deux seconds membres soient positifs, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) > 0.$$

Si le côté d par exemple est le plus grand côté, les trois facteurs $p-a$, $p-b$, $p-c$, sont positifs, et la seule condition de possibilité est :

$$p - d > 0;$$

ce qui peut s'écrire :

$$d < a + b + c;$$

le plus grand côté doit être inférieur à la somme des trois autres.

Calcul des diagonales.

Nous avons obtenu :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B.$$

Remplaçons cos B par sa valeur; il vient :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab}{ab + cd};$$

ce qui peut s'écrire :

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

De même : $$y^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

On déduit de ces valeurs les deux théorèmes de Ptolémée, relatifs au quadrilatère inscriptible convexe.

En faisant le produit :

$$x^2y^2 = (ac+bd)^2;$$

$$xy = ac + bd:$$

et en faisant le quotient :

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2};$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

Dans un quadrilatère convexe inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés;

Le rapport des diagonales est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.

Surface du quadrilatère. — On la considère comme la somme des surfaces des deux triangles ABC et ADC :

$$S = \frac{1}{2}ab \sin B + \frac{1}{2}cd \sin B = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin B.$$

Or :

$$\sin^2 B = 4\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ab+cd)^2};$$

et : $$\sin B = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd};$$

et, en portant dans S :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Rayon du cercle circonscrit. — Dans le triangle ABC, on a :

$$2R = \frac{x}{\sin B}.$$

Or : $$\sin B = \frac{2S}{ab+cd};$$

et l'on a : $$2R = \frac{ab+cd}{2S}\cdot\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

$$= \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{2S};$$

ce que l'on peut écrire :

$$4RS = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}.$$

Remarquons que si, dans toutes les formules précédemment établies on fait $d = 0$, on retrouve les formules relatives au triangle de côtés a, b, c.

Angle des diagonales. — Soit θ l'angle des diagonales; la surface du quadrilatère est la somme des surfaces des quatre triangles ayant pour sommet commun le point de rencontre O des diagonales.

On a donc :

$$2\,S = (OA.OB + OA.OD + OB.OC + OC.OD)\sin\theta$$
$$= (OA + OC)(OB + OD)\sin\theta = xy\sin\theta;$$

d'où :
$$\sin\theta = \frac{2\,S}{ac + bd}.$$

EXERCICES

125. Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la somme $b + c$ des côtés de l'angle droit.

126. Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre $2p$ et le rayon R du cercle circonscrit.

127. Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre $2p$ et un angle aigu B.

128. Résoudre un triangle rectangle connaissant un angle aigu B et la différence $b - c = d$ des deux côtés de l'angle droit.

129. Résoudre un triangle rectangle connaissant le périmètre $2p$ et la hauteur h.

130. Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et le rayon r du cercle inscrit.

131. Résoudre un triangle rectangle connaissant le rayon r du cercle inscrit et l'angle aigu B.

132. Résoudre un triangle rectangle connaissant le rayon r du cercle inscrit et le rapport $\frac{b}{c} = k$ des côtés de l'angle droit.

133. Résoudre un triangle rectangle connaissant les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit.

134. Résoudre un triangle rectangle connaissant un côté de l'angle droit b, et la différence $a - c = d$, entre l'hypoténuse et l'autre côté.

135. Résoudre un triangle connaissant ses angles A, B, C, et le rayon r du cercle inscrit.

136. Résoudre un triangle connaissant les angles et le périmètre.

137. Résoudre un triangle connaissant les angles et le rayon R du cercle circonscrit.

138. Résoudre un triangle connaissant les angles et la surface S.

139. Résoudre un triangle connaissant les angles et la somme :

$$a^2 + b^2 + c^2 = l^2$$

les carrés des trois côtés.

140. Résoudre un triangle connaissant un angle A, le côté opposé a et la bissectrice α de cet angle A.

141. Résoudre un triangle connaissant un côté b, l'angle adjacent A, sachant en outre que les longueurs des bissectrices intérieure et extérieure de cet angle sont égales.

142. Résoudre un triangle connaissant le côté a, l'angle A et le rapport $\frac{h_b}{h_c} = K$, des hauteurs issues des sommets B et C.

143. Résoudre un triangle connaissant l'angle A, le côté a et la somme $b^2 + c^2 = K^2$, des carrés des deux autres côtés.

144. Résoudre un triangle connaissant l'angle A, le côté b et la somme $a + c = l$, des deux autres côtés.

145. Résoudre un triangle connaissant un côté a, le rayon r du cercle inscrit et la somme $b + c = l$. des deux autres côtés.

146. Résoudre un triangle connaissant le côté a, le rayon r du cercle inscrit et la différence $b - c = l$. des deux autres côtés.

147. Résoudre un triangle connaissant un côté a, le périmètre $2p$ et la surface S.

148. Résoudre un triangle connaissant le côté a, la hauteur h_a et le rayon r du cercle inscrit.

149. Résoudre un triangle isocèle, connaissant les rayons r et r' du cercle inscrit et du cercle exinscrit tangent à la base.

150. Résoudre un triangle, connaissant deux côtés a et b et sachant que l'angle A est double de l'angle B.

CHAPITRE XI

DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES. FONCTIONS PRIMITIVES

DERIVEES

148. Nous savons que la dérivée d'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle est la limite, si elle existe, du rapport :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

quand h tend vers 0, x étant une valeur de la variable prise dans l'intervalle considéré, et h un accroissement donné à x.

Le calcul des dérivées des fonctions circulaires repose sur une proposition que nous avons établie déjà en Seconde et que nous allons reprendre.

149. ***Si x est la mesure d'un arc en radians, le rapport $\frac{x}{\sin x}$ a pour limite 1, lorsque x tend vers zéro.***

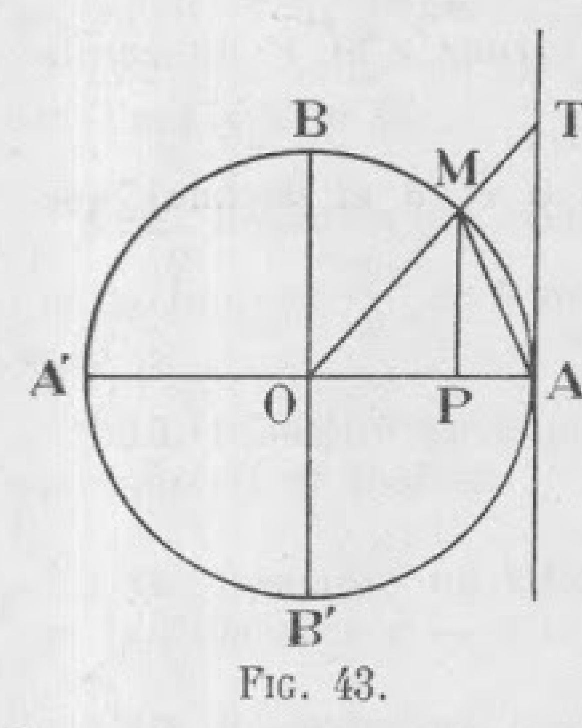


FIG. 43.

Soit M l'extrémité de l'arc x, que nous supposons d'abord positif, P la projection de M sur l'axe des cosinus, T le point de rencontre du rayon OM et de l'axe des tangentes; joignons AM; si l'on considère le triangle OMA, le secteur circulaire OMA et le triangle OAT, chacun d'eux est intérieur au suivant et, par suite, leurs surfaces sont rangées dans l'ordre de grandeur où on les rencontre. Les doubles de ces surfaces ont respectivement pour mesures :

$$\text{OA} \times \text{PM} = \sin x; \quad \text{arc AM} \times \text{OA} = x; \quad \text{AT} \times \text{OA} = \text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

et l'on a :
$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x};$$

d'où l'on déduit, $\sin x$ étant positif :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

quand x tend vers 0, $\cos x$ et, par suite $\frac{1}{\cos x}$ tend vers 1. et le rapport :
$$\frac{x}{\sin x},$$

qui est toujours compris entre 1 et un nombre qui tend vers 1, a nécessairement 1 pour limite.

Supposons maintenant que x tende vers 0 par valeurs négatives et soit x' sa valeur absolue. On a :

$$x = -x'; \qquad \sin x = -\sin x';$$

et :
$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x'}{\sin x'};$$

d'après ce qui précède, le second membre a pour limite 1; il en est de même du premier.

Le rapport :
$$\frac{\sin x}{x}$$

inverse du précédent a aussi 1 pour limite quand x tend vers zéro.

150. Remarque. — La démonstration suppose les arcs mesurés en radians. S'il n'en est pas ainsi la limite du rapport n'est plus égale à 1. Supposons, par exemple, qu'un arc α mesuré en grades tende vers zéro; soit x sa mesure en radians, on a :

$$\alpha = \frac{200\,x}{\pi} \qquad \sin \alpha = \sin x;$$

et :
$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{200}{\pi} \cdot \frac{x}{\sin x}.$$

quand α tend vers 0, x tend vers 0, et $\frac{x}{\sin x}$ a pour limite 1; donc

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} \text{ a pour limite } \frac{200}{\pi}.$$

La limite serait $\frac{180}{\pi}$ si l'arc α était mesuré en degrés.

151. Conséquences. — Chacun des rapports :

$$\frac{\sin px}{\sin qx}, \quad \frac{\sin px}{\operatorname{tg} qx}, \quad \frac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx},$$

a pour limite $\frac{p}{q}$ quand x tend vers 0, car on peut les écrire :

$$\frac{\sin px}{\sin qx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\frac{\sin px}{px}}{\frac{\sin qx}{qx}}, \quad \frac{\sin px}{\operatorname{tg} qx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\frac{\sin px}{px}}{\frac{\sin qx}{qx}} \cos qx,$$

$$\frac{\operatorname{tg} px}{\operatorname{tg} qx} = \frac{p}{p} \cdot \frac{\frac{\sin px}{px}}{\frac{\sin qx}{qx}} \cdot \frac{\cos qx}{\cos px}.$$

$\frac{\sin px}{px}$, $\frac{\sin qx}{qx}$, $\cos px$, $\cos qx$ tendant vers 1, les rapports ont pour limites $\frac{p}{q}$.

Dérivée de sin x.

152. La fonction $y = \sin x$ est définie pour toutes les valeurs de x; donnons à la variable une valeur x, et un accroissement h, et cherchons la limite du rapport :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

quand h tend vers 0. En transformant le numérateur en produit, ce rapport s'écrit :

$$\frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Quand h tend vers 0, le rapport $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ a pour limite 1; $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ a pour limite $\cos x$; donc :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

a pour limite $\cos x$.

Ainsi, *la dérivée de* $y = \sin x$ *est* $y' = \cos x$.

Dérivée de cos x.

153. Le calcul est analogue au précédent. La fonction $y = \cos x$ est définie pour toutes les valeurs de x, et l'on a, en donnant à x deux valeurs voisines x et $x + h$:

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

et quand h tend vers 0, le rapport a pour limite $-\sin x$.

La dérivée de $y = \cos x$ *est* $y' = -\sin x$.

154. Remarque. — On peut déduire ce résultat du théorème des fonctions de fonctions, en écrivant :

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Si l'on pose : $u = \frac{\pi}{2} - x$, $y = f(u)$, ce théorème donne :

$$y_x' = f_u'(u) \times u_x' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times -1 = -\sin x.$$

Dérivée de tg x.

155. La fonction $y = \operatorname{tg} x$ est définie, sauf pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Donnons à x deux valeurs voisinnes dans un intervalle ne contenant pas une des valeurs exceptionnelles; on a :

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \frac{\sin h}{h \cos x \cos(x+h)} =$$

$$\frac{\sin h}{h} \times \frac{1}{\cos x \cos(x+h)};$$

quand h tend vers 0, le rapport a pour limite : $\frac{1}{\cos^2 x}$.

La dérivée de $y = \operatorname{tg} x$ est $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

On peut aussi l'écrire :

$$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

La formule : $$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

qui donne la dérivée d'un quotient $y = \frac{u}{v}$ permet aussi de calculer la dérivée de tg x, en écrivant :

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad u = \sin x; \quad u' = \cos x; \quad v = \cos x; \quad v' = -\sin x;$$

et : $$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\, x.$$

156. Le théorème des fonctions de fonctions permet de calculer les dérivées de fonctions circulaires plus compliquées que les trois fonctions élémentaires.

Si u est une fonction de x, admettant une dérivée u', les dérivées de :

$$y = \sin u; \quad y = \cos u; \quad y = \text{tg}\, u$$

sont respectivement :

$$y' = u' \cdot \cos u; \quad y' = -u' \sin u; \quad y' = u'(1 + \text{tg}^2\, u) = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Par exemple, les dérivées de

$$y = \sin ax; \quad y = \cos(ax^2 + bx + c); \quad y = \text{tg}\,(x^2 + 1)$$

sont :

$$y' = a \cos ax; \quad y' = -(2ax + b)\sin(ax^2 + bx + c);$$

$$y' = 2x\,[1 + \text{tg}^2\,(x^2 + 1)] = \frac{2x}{\cos^2(x^2 + 1)}.$$

La dérivée de u^m étant $mu^{m-1} \cdot u'$, les dérivées de :

$$y = \sin^m x; \quad y = \cos^m x; \quad y = \text{tg}^m\, x$$

sont :

$$y' = m \sin^{m-1} x \cos x; \quad y' = -m \cos^{m-1} \cdot \sin x;$$

$$y' = \frac{m\, \text{tg}^{m-1}\, x}{\cos^2 x}.$$

Nous saurons maintenant étudier les variations d'un grand nombre de fonctions trigonométriques. Nous traiterons un exemple quand nous aurons expliqué comment on calcule quelques fonctions primitives de fonctions circulaires.

FONCTIONS PRIMITIVES

157. Tout d'abord, les fonctions primitives de $\sin x$ et $\cos x$ sont, respectivement, $-\cos x$ et $\sin x$; la fonction primitive de $1 + \text{tg}^2\, x$ est tg x; c'est aussi celle de $\frac{1}{\cos^2 x}$ (à une constante près).

La dérivée de $\text{cotg}\, x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ étant $\frac{1}{\sin^2 x}$ la fonction primitive de $\frac{1}{\sin^2 x}$ est $-$ cotg x.

158. Il faut aussi savoir calculer les fonctions primitives de $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin^3 x$, $\cos^3 x$.

Soit d'abord $y = \sin^2 x$; la formule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ donne :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Nous avons vu que la dérivée de $\sin ax$ est $a \cos ax$; donc, une primitive de $\cos ax$ est :

$$\frac{1}{2}\sin ax;$$

et une fonction primitive de $y = \sin^2 x$ est :

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x.$$

On voit de la même façon qu'une fonction primitive de $y = \cos^2 x$ est : $$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$$

en écrivant : $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

159. Pour $y = \sin^3 x$, on écrit :

$$y = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x - \cos^2 x \sin x.$$

La primitive de $\sin x$ est $-\cos x$; une primitive de $-\cos^2 x \sin x$ est $\frac{1}{3}\cos^3 x$, puisque la dérivée de $\cos^3 x$ est $-3\cos^2 x \sin x$.

Donc, une primitive de $y = \sin^3 x$ est :

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x.$$

On calculera de la même façon une primitive de $y = \cos^3 x$ en écrivant :

$$y = \cos x\,(1 - \sin^2 x) = \cos x \sin^2 x \cos x;$$

et :

$$F(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

Pour terminer, nous traiterons un exemple de variation de fonction trigonométrique et une application des fonctions primitives au calcul d'une surface.

160. Problème. — *On donne une circonférence de centre* O, *de rayon* R, *et un point fixe* C *sur cette circonférence. Considérant un point* M *variable de la circonférence, on le joint au point* D *diamétralement opposé à* C, *et on abaisse une perpendiculaire* MN *sur la tangente* AB *au point* C. *Soit* x *l'angle variable que fait le rayon* OM *avec le rayon* OD.

Etudier la variation de la somme :

$$y = \text{MD} + \text{MN};$$

quand x varie de 0 à 2π. Construire la courbe représentative et calculer l'aire limitée par cette courbe, l'axe des x et les ordonnées extrêmes, en supposant R = 1.

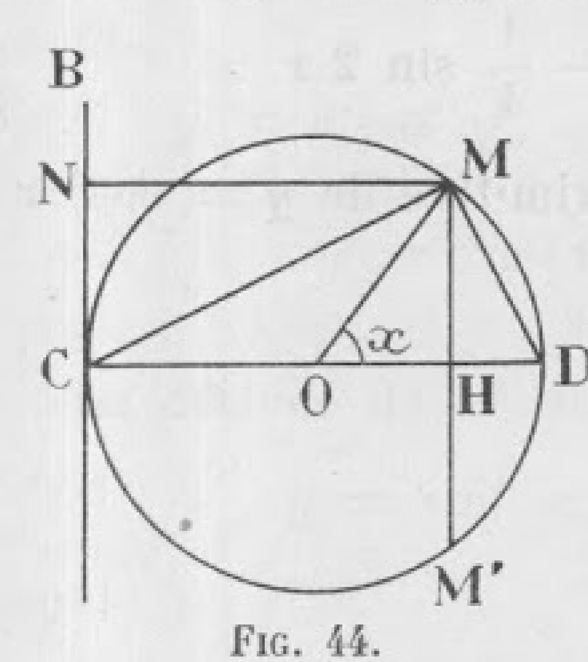


Fig. 44.

Joignons CM; NM = CH est la projection du contour COM sur CD; on a donc :

$$\text{NM} = \text{CO} + \text{OH} = \text{R} + \text{R}\cos x;$$

d'autre part :

$$\text{DM} = 2\,\text{R}\sin\frac{x}{2};$$

et : $$y = \text{R}\left(1 + \cos x + 2\sin\frac{x}{2}\right).$$

Si M' est le symétrique de M par rapport à CD, quand M vient en M', la somme y reprend la même valeur. Il suffira donc d'étudier la variation de y quand x varie de 0 à π; on complètera ensuite par symétrie. On voit, d'ailleurs, que si on remplace dans y x par deux valeurs $\pi - x$ et $\pi + x$, on retrouve la même valeur.

La dérivée de y est :

$$y' = \text{R}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin x\right) = \text{R}\cos\frac{x}{2}\left(1 - 2\sin\frac{x}{2}\right).$$

Cette dérivée s'annule, dans l'intervalle $(0, \pi)$, pour :

$$\cos\frac{x}{2} = 0, \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \pi;$$

et : $$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad x = \frac{\pi}{3}$$

Elle est positive quand x croît de 0 à $\frac{\pi}{3}$, négative quand x croît de $\frac{\pi}{3}$ à π; la fonction passe pour $x = \frac{\pi}{3}$ par un maximum égal à $\frac{5\,\text{R}}{2}$ pour $x = \pi$, par un minimum égal à 2 R; elle part de 2 R pour $x = 0$.

Le tableau suivant, où nous avons fait R = 1, donne les variations de y quand x croît de 0 à 2π.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
y'	1	+	0	−	0	+	0	−	1
y	2	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2

La courbe représentative a la forme indiquée par la figure 45.

La surface considérée, ombrée sur la figure, a pour mesure :

$$s = F(2\pi) - F(0).$$

F(x) étant une primitive de y.

Cette primitive a pour valeur :

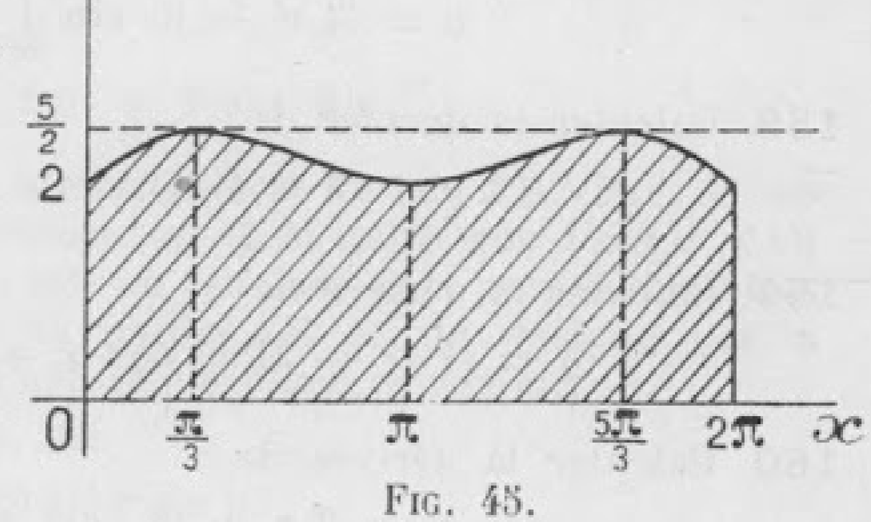


Fig. 45.

$$F(x) = \text{R}\left[x + \sin x - 2\cos\frac{x}{2}\right].$$

En faisant R = 1, on a donc :

$$s = 2\pi + 4$$

EXERCICES

151. Calculer la dérivée de :

$$y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

152. Calculer la dérivée de :

$$y = \frac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$$

153. Calculer la dérivée de :

$$y = x - \sin x \cos x.$$

154. Calculer la dérivée de :

$$y = (\sin^2 x + 2) \cos x.$$

155. Calculer la dérivée de :

$$y = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + 2 \operatorname{cotg} x.$$

156. Calculer la dérivée de :

$$y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

157. Calculer la dérivée de :

$$y = (3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x.$$

158. Calculer la dérivée de :

$$y = (3x^2 - 6) \cos x + (x^3 - 6x) \sin x.$$

159. Calculer la dérivée de :

$$y = (4x^3 - 24x) \cos x + (x^4 - 12x^3 + 24) \sin x.$$

160. Calculer la dérivée de :

$$y = 3x + (2 \cos^2 x + 3) \sin x \cos x.$$

161. Calculer la dérivée de :

$$y = \cos x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$$

162. Calculer la dérivée de :

$$y = \frac{\operatorname{cotg}^2 x \cos^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x}.$$

163. Calculer la dérivée de :

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{m + (mx + p) \operatorname{tg} x}.$$

164. Calculer la dérivée de :

$$y = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos x + \sin x + x (\sin x - \cos x)}.$$

165. Calculer une fonction primitive de $f(x) = \sin^4 x$.

166. Calculer une fonction primitive de $f(x) = \cos^4 x$.

167. Calculer une fonction primitive de :

$$f(x) = \sin mx \sin px,$$

m et p étant deux nombres entiers.

168. Calculer une fonction primitive de :

$$f(x) = \cos mx \cos px,$$

m et p étant entiers.

169. Calculer une fonction primitive de :

$$f(x) = \sin mx \cos px,$$

m et p étant entiers.

170. Calculer une fonction primitive de :

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

171. Etudier les variations de la fonction :

$$y = \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin x \cos x.$$

(*Bacc.*, Dijon.)

172. Etudier les variations de la fonction :

$$y = 6 \sin x - 3 \cos 2x + 2 \sin 3x.$$

173. On donne une demi-circonférence de diamètre AB = 2 R. Par A, on mène une demi-droite coupant la circonférence en C et telle que l'angle BAD soit égal à 60°. D'un point M de l'arc BC on abaisse les perpendiculaires MP et MR sur AB et sur AD. On mène la corde AM et on désigne par x l'angle BAM. Le point M se déplaçant sur l'arc BC, évaluer la somme :

$$y = MP + MR$$

en fonction de R et de x et étudier la variation de y.

(*Bacc.*, Paris.)

174. D'un point M d'une demi-circonférence de diamètre AB = 2 R, on abaisse la perpendiculaire MP sur AB et la perpendiculaire MQ sur la tangente AC en A. On forme ainsi un rectangle AQMP :

1° Evaluer l'aire de ce rectangle en fonction de R et de l'angle BAM = x.
2° Etudier les variations de cette aire, M décrivant la demi-circonférence. Examiner le cas où l'aire est maximum.

(*Bacc.*, Paris.)

175. On donne un angle droit AOB; dans l'intérieur de l'angle, un point P dont les distances aux deux côtés sont : PK = a, PH = l.
Par le point P, on mène une droite variable MPN, qui rencontre les deux côtés de l'angle en M et N. On désigne par x l'angle aigu NMO :

1° Calculer en fonction de x la longueur MN $= y$ de la droite.

2° Etudier la variation de y quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et représenter cette variation par une courbe.

3° Calculer le minimum de y.

4° Application : $a = 8^{cm}$, $b = 1^{cm}$.

(*Bacc.*, Paris.)

176. Une ellipse de foyer F et F′ est définie par son grand axe $2a$ et sa distance focale $2c$. On mène par le foyer F un rayon MF rencontrant l'ellipse en M et faisant avec le grand axe AFF′A′, un angle x.:

1° Calculer en fonction de a, c, x, la longueur $\rho =$ FM de ce rayon vecteur;

2° Calculer la longueur $\rho' =$ F′M′ du rayon vecteur F′M′ parallèle à FM, mené par le foyer F′;

3° Montrer que

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$$

est indépendant de x, et étudier les variations de :

$$y = \frac{1}{\rho + \rho'}$$

quand x varie, c'est-à-dire que M décrit la demi-ellipse A′BA;

4° Etudier la variation de l'aire du trapèze FMM′F′ dans les mêmes conditions.

(*Bacc.*, Grenoble.)

CHAPITRE XII

CALCULS PRATIQUES

---

161. Usage des tables de logarithmes des lignes trigonométriques. — Les tables de logarithmes des lignes trigonométriques donnent les logarithmes des fonctions circulaires des angles compris entre zéro et un droit, de minute en minute, en degrés ou en grades. On utilise plus volontiers les grades, où les calculs se font dans le système décimal; leur emploi est d'ailleurs obligatoire aux concours des deux écoles Polytechnique et de Saint-Cyr.

Le sinus et la tangente d'un angle étant respectivement égaux au cosinus et à la cotangente de l'angle complémentaire, on inscrit seulement dans les tables les logarithmes des fonctions circulaires des angles de 0 à 50 grades. Dans chaque page de la table, les valeurs des angles sont inscrites à droite, et on lit la table de haut en bas dans chacune des colonnes intitulées sinus, cosinus, tangentes et cotangentes; les compléments sont inscrits à gauche, et, pour ceux-ci, on lit la table de bas en haut, les colonnes intitulées vers le bas cosinus, sinus, cotangentes, tangentes.

Calcul du logarithme d'une fonction circulaire d'un angle inférieur à 100 grades.

162. Si l'angle contient seulement des minutes, le logarithme de chacune de ses fonctions circulaires est inscrit dans la table. Sinon, il faut, pour les secondes de grade, faire une correction analogue à celle que l'on fait quand on cherche le logarithme d'un nombre.

On admet que, lorsqu'on passe d'un angle inscrit dans la table au suivant, l'accroissement de logarithme d'une quelconque de ses lignes trigonométriques varie proportionnellement à l'angle.

On cherche la différence tabulaire, qui, dans certaines tables, est inscrite entre les deux valeurs consécutives des logarithmes dans une petite colonne supplémentaire. Une règle de trois donne la correction à effectuer; on peut aussi utiliser de petites tables de parties proportionnelles qui sont en marge de la table.

On voit que les calculs se font de la même façon que pour les logarithmes des nombres.

163. Exemples. — I. ***Calculer* log sin 34gr,52 43.**

La table donne : log sin 34gr,52 : $\overline{1},71270$; et D = 11.

La table des parties proportionnelles donne :

pour 40″ : 4,4; pour 3″ : 0,38;

la correction à effectuer est donc : 4,78.

On ne conserve que le chiffre précédant la virgule, en le forçant de 1, puisque le suivant est 7. Le calcul se dispose, sans explication, de la façon suivante :

	sin 34gr,5243	
	Pour 34gr,52..	$\overline{1},71270$
D = 11;	Pour 40	4,4
	Pour 3	0,38
	log sin 34gr,5243	$\overline{1},71275$

164. II. ***Calculer* log tg 62gr,2573.**

	62gr,2573	
	Pour 62gr,25	0,17142
D = 15;	Pour 70	10,5
	Pour 3	0,45
	log 62gr,2573	0,17153

Pour les cosinus et les cotangentes, il ne faut pas oublier qu'ils décroissent quand l'angle croît; il faut alors retrancher les corrections; nous conseillons, pour éviter toute erreur, de remplacer l'angle par son complément.

III. ***Calculer* log cos 74gr,3173.**

complément	25,6827	
	Pour 25,68......	$\overline{1},59387$
D = 16;	Pour 20	3,2
	Pour 7	1,12
	log cos 74gr,3173..	$\overline{1},59391$

PROBLÈMES INVERSES.

165. IV. ***Calculer l'angle x défini par :***

$$\log \operatorname{tg} x = \overline{1},43028;$$

	Pour $\overline{1},43005$....	16gr,74
	Pour 23	
D = 27;	Pour 21,6	80
	1,4	5
	x = 16gr,7485.	

166. V. ***Calculer l'angle x tel que :***

$$\log \operatorname{cotg} x = \overline{1},06951$$

$$\log \operatorname{tg} (100 - x) = \overline{1},06951$$

P. $\overline{1},06909$ —	7gr,43
42	
p. 41,5	70
p. 1,5	2

100 — x = 7gr,4372;
x = 92gr,5628.

167. ***Résoudre un triangle* ABC, *rectangle en* A, *connaissant l'hypoténuse a et un côté de l'angle droit b.***

a = 37m,50; b = 27m,58.

Formules :

$$\sin B = \frac{b}{a}; \quad C = 100^{gr} - B; \quad c = a \sin B; \quad S = \frac{1}{2} bc.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de log et de colog a :

log a = 1,57403
colog a = $\overline{2},42597$

log b = 1,44059

CALCULS DÉFINITIFS.

Calcul de B et C :

	log b =	1,44059	
	colog a =	$\overline{2},42597$	
	log sin B =	$\overline{1},86656$	
	Pour	$\overline{1},86652$	57gr,60
d = 7	Pour 4		67

B = 52gr,6067
C = 47gr,3933

Calcul de log sin C :

$C = 47^{gr},3933$

	Pour	$47^{gr},39$	$\overline{1},83093$
$d = 7$;	Pour	33	2

$\log \sin C = \overline{1},83095$

Calcul de c :

$\log a = 1,57403$
$\log \sin C = \overline{1},83095$
$\log c = 1,40498$

	Pour	1,40483	25,40
$d = 17$	Pour	15	8

$c = 25^{m},41.$

Calcul de S :

$\log b = 1,44059$
$\log c = 1,40498$
$\text{colog } 2 = \overline{1},69897$
$\log S = 2,54454.$

Pour 2,54456 $350^{m2},4$ par excès.

168. ***Résoudre un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse*** $a = 37^{m},50$ ***et un côté de l'angle droit*** $b = 27^{m},58$.

Formules :

$$2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \log (a - b) + \text{colog } (a + b);$$

$$2 \log c = \log (a - b) + \log (a + b).$$

CALCULS AUXILIAIRES.

$a = 37,50$
$b = 27,58$
$a + b = 65,08$
$a - b = 9,92$

Calcul de $\log (a - b)$

$\log (a - b) = 0,99651$

Calcul de $\log (a + b)$, et colog $(a + b)$:

$\log (a + b) = 1,81345$
$\text{colog } (a + b) = \overline{2},18655$

Calcul de $\log b$:

$\log b = 1,44059$

CALCULS DÉFINITIFS.

Calcul de C :

$\log (a - b) = 0,99651$
$\text{colog } (a + b) = \overline{2},18655$
$2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \overline{1},18306$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\overline{2} + 1,18306}{2} = \overline{1},59153$$

$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \overline{1},59153$

	Pour	1,59141	$23^{gr},69$
	Pour	12	60
$d = 20$			

$\frac{C}{2} = 23^{gr},6960$
$C = 47^{gr},3920$
$B = 52^{gr},6080$

Calcul de S :

$\log b = 1,44059$
$\log c = 1,40790$
$\text{cotg } 2 = \overline{1},69897$
$\log S = 2,54746$
$S = 352^{m2},74$

Calcul de c :

$\log (a - b) = 0,99651$
$\log (a + b) = 1,81945$
$2 \log c = 2,81596$
$\log c = 1,40798$

Pour 1,40790 25,58

$c = 25^{m},55.$

169. ***Résoudre un triangle*** ABC, ***connaissant un côté*** a ***et les deux angles adjacents :***

$a = 458^{m},36$; $B = 85^{gr},0514$; $C = 48^{gr},1120$.

Formules :

$$A = 200^{gr} - (B + C); \qquad b = \frac{a \sin B}{\sin A};$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}; \qquad S = \frac{1}{2}\, bc \sin A.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de $\log a$:

$a = 458,36$

	Pour	458,3	2,66115
$d = 9$	Pour	6	5
	$\log a =$		2,66120

Calcul de log sin B :

$B = 85,0514$

	Pour	85,05	$\overline{1},98791$
$d = 2$	Pour	14	0,3
	$\log \sin B =$		$\overline{1},98791$

Calcul de log sin C :

$C = 48,1120$

	Pour	48,11	$\overline{1},83620$
$d = 7$	Pour	20	1
	$\log \sin C =$		$\overline{1},83621$

CALCULS DÉFINITIFS.

$B = 85,0514$
$C = 48,1120$
$B + C = 133,1634$
$A = 66,8366$

Calcul de c :

$\log a = 2,66120$
$\log \sin B = \overline{1},98791$
$\text{colog } \sin A = 0,06180$
$\log b = 2,71091$

	Pour	2,71088	513,9
$d = 8$	Pour	3	4

$b = 513^{m},94.$

Calcul de c :

$\log a = 2,66120$
$\log \sin C = \overline{1},83621$
$\text{colog } \sin A = 0,06180$
$\log c = 2,55921$

	Pour	2,55919	362,4
$d = 4$	Pour	2	4

$c = 362^{m},44$

Calcul de colog sin A :

A = 66,8366
Pour 66,83 $\overline{1},93817$
$d = 4$ Pour 64 3
log sin A = $\overline{1},93820$
colog sin A = 0,06180

Calcul de S :

log b = 2,71091
log c = 2,55921
log sin A = $\overline{1},93820$
colog 2 = $\overline{1},69897$
log S = 4,90729
Pour 4,90730
80.785^{m2} par excès.

170. ***Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris :***

$b = 171^m,3$; C = $120^m,7$; A = $66^{gr},84$.

Formules :

$$\frac{B + C}{2} = 100 - \frac{A}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de $\frac{B + C}{2}$:

100
$\frac{A}{2}$ = 33,42
$\frac{B + C}{2}$ = 66,58

Calcul de colog $(b + c)$:

b = 171,3
c = 120,7
$b + c$ = 292
$b - c$ = 50,6
log $(b + c)$ = 2,46538
colog $(b + c)$ = $\overline{3},53462$
log $(b - c)$ = 1,70415

CALCULS DÉFINITIFS.

Calcul de $\frac{B - C}{2}$:

log $(b - c)$ = 1,70415
log cotg $\frac{A}{2}$ = 0,23720
colog $(b + c)$ = $\overline{3},53462$
log tg $\frac{B - C}{2}$ = $\overline{1},47597$
Pour $\overline{1},47576$ $18^{gr},50$
$d = 25$ Pour 21 52

Calcul de B et C :

$\frac{B + C}{2}$ = $66^{gr},58$
$\frac{B - C}{2}$ = $18^{gr},5052$
B = $84^{gr},0852$
C = $48^{gr},9748$

Calcul de log cotg $\frac{A}{2}$:

log cotg 33,42 = 0,23720
log b = log 171,3 = 2,23376
log sin A = log $66^{gr},84$
= $\overline{1},93821$

Calcul de colog sin B :

B = $84^{gr},0852$
Pour $84^{gr},08$ $\overline{1},98628$
colog sin B = 0,01372

Calcul de a :

log b = 2,23376
log sin A = $\overline{1},93821$
colog sin B = 0,01372
log a = 2,18569
Pour 2,18554 153,3
$d = 29$ 15 5
$a = 153^m,35$.

171. ***Résoudre un triangle* ABC *connaissant :***

$a = 243^m,5$; $b = 327^m,4$; A = $37^{gr},2$.

Formules :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}; \quad C = 180^\circ - A - B; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

log a = log 243,5 = 2,38650
colog a = $\overline{3},61350$
log b = log 327,4 = 2,51508
log sin A = log sin $37^{gr},2$
= $\overline{1},73980$
colog sin A = 0,26020

Calcul de B″ :

200,000
52,8983
B″ = $147^{gr},1017$

Calcul de A + B′ :

A = 37,2
B′ = 52,8983
A + B′ = 90,0983

CALCULS DÉFINITIFS.

Calcul de B :

log b = 2,51508
colog a = $\overline{3},61350$
log sin A = $\overline{1},73980$
log sin B = $\overline{1},86838$
Pour $\overline{1},86833$ $52^{gr},89$
$d = 6$ Pour 5 83
B′ = $52^{gr},8983$

Calcul de C′ :

200 = 200,0000
A + B′ = 90,0983
C′ = 109,9017
C′ = $109^{gr},9017$

Calcul de A + B″ :

$A = 37,2$
$B'' = 147,1017$
$A + B'' = 184,3017$

Calcul de log sin C′ :

$\sin C' = \sin (A + B')$
$A + B' = 90,0983$
Pour 90,09 $\overline{1},99472$
$d = 11$
Pour 80 8,8
Pour 3 0,3
$\log \sin C' = \overline{1},99481$

Calcul de log sin C″ :

$C'' = 15,6983$
Pour 15,69 $\overline{1},38734$
$d = 27$
Pour 80 21,6
Pour 3 0,8
$\log \sin C'' = \overline{1},38756$

Calcul de C″ :

200,0000
$A + B'' = 184,3017$
C'' 15,6983

Calcul de c' :

$\log a = 2,38650$
$\log \sin C' = \overline{1},99481$
$\text{colog} \sin A = 0,26020$
$\log c' = 2,64151$
Pour 2,64147 438,0
$d = 10$ 4 4
$c' = 438^{m},08$

Calcul de c'' :

$\log a = 2,38650$
$\log \sin c'' = \overline{1},38756$
$\text{colog} \sin A = 0,26020$
$\log c'' = 2,03426$
$\log c'' = 2,03426$
Pour 2,03423 108,2
$c'' = 108^{m},2.$

172. ***Résoudre un triangle*** **ABC** ***connaissant les trois côtés :***

$a = 458^{m},36;\quad b = 513^{m},96;\quad c = 362^{m},44.$

Formules :

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};\qquad \text{tg}\,\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a};$$

$$\text{tg}\,\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b};\qquad \text{tg}\,\frac{C}{2}\,\frac{r}{p-c};\qquad S = pr.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

$a = 451,36$
$b = 513,96$
$c = 362.44$
$2p = 1.334,76$
$p = 667,38$
$p - a = 209,02$
$p - b = 153,42$
$p - c = 304.94$

CALCULS DÉFINITIFS.

Calcul de A :

$\log r = 2,08295$
$\text{colog}\,(p - a) = \overline{3},67981$
$\log \text{tg}\,\frac{A}{2} = \overline{1},78276$
Pour $\overline{1},76265$ $33^{gr},41$
$d = 16$ Pour 11 73
$\frac{A}{2} = 33^{gr},4173;\quad A = 66^{gr},8346$

Calcul de log et colog $p - a$:

$p - a = 209,02$
Pour 209,0 2,32015
$d = 20$ Pour 2 4
$\log (p - a) = 2,32019$
$\text{colog}\,(p - a) = \overline{3},67981$

Calcul de log et colog $p - b$:

$p - b = 153,42$
Pour 153,4 2,18583
$d = 18$ Pour 2 5
$\log (p - b) = 2,18588$
$\text{colog}\,(p - b) = \overline{3},81422$

Calcul de log et colog $p - c$:

$p - c = 304,94$
Pour 304,9 2,48416
$d = 14$ Pour 4 6
$\log (p - c) = 2,48422$
$\text{colog}\,(p - c) = \overline{3},51578$

Calcul de log p et colog p :

$p = 667,38$
Pour 667,3 2,82432
$d = 7$ Pour 8 6
$\log p = 2,82438$
$\text{colog}\, p = \overline{3},17562$

Calcul de log r :

$p - a = 2,32019$
$p - b = 2,18588$
$p - c = 2,48422$
$\text{colog}\, p = \overline{3},17562$
$2 \log r = 4,16591$
$\log r = 2,08295$

Calcul de B :

$\log r = 2,08295$
$\text{colog}\,(p - b) = \overline{3},81412$
$\log \text{tg}\,\frac{B}{2} = \overline{1},89707$
Pour $\overline{1},89699$ $42^{gr},52$
$d = 14$ Pour 8 57
$\frac{B}{2} = 42^{gr},3257;\quad B = 85^{gr},0514.$

Calcul de C :

$\log r = 2,08295$
$\text{colog}\,(p - c) = \overline{3},51578$
$\log \text{tg}\,\frac{C}{2} = \overline{1},59873$
Pour $\overline{1},59861$ $24^{gr},05$
$d = 20$ Pour 12 60
$\frac{C}{2} = 24^{gr},0560;\quad C = 48^{gr},1120.$

Calcul de S :

$\log r = 2,08295$
$\log p = 2,82438$
$\log S = 4,90733$
Pour 4,90730
$80.785^{m^2}.$

Vérification :

$A = 66^{gr},8346$
$B = 85^{gr},0514$
$C = 48^{gr},1120$
$A + B + C = 199^{gr},9980$

APPENDICE

Bien que la division des arcs par 2 et les applications de la trigonométrie aux opérations sur le terrain ne soient plus au programme de la classe de mathématiques, nous croyons utile, en vue de certains concours, de traiter ces questions pour terminer.

DIVISION DES ARCS PAR 2

Le problème de la division des arcs se pose, d'une manière générale, de la façon suivante : connaissant une ligne trigonométrique d'un arc a calculer une ou plusieurs fonctions circulaires de l'arc $\frac{a}{n}$, n étant un nombre positif entier. Nous le traiterons, dans quelques cas, lorsque $n = 2$.

173. Problème. — ***Connaissant*** $\cos a$, ***calculer*** $\cos \frac{a}{2}$, $\sin \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

Dans la formule de multiplication par 2.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

remplaçons x par $\frac{a}{2}$ et adjoignons à la relation obtenue la relation : $\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1$, nous obtenons, pour calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$, le système de deux équations :

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \cos a, \\ \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} = 1, \end{cases}$$

qui donnent, par addition et soustraction :

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}, \qquad \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}.$$

Observons que ces deux relations auraient pu être écrites de suite, car nous les avons déjà obtenues à propos de la multiplication par 2. Elles donnent :

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}, \qquad \sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}};$$

et, en divisant membres à membres :

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

On voit que l'on obtient pour chaque fonction circulaire de l'arc $\frac{a}{2}$ deux valeurs opposées. Il n'est pas difficile d'expliquer ce résultat : on se donne non pas l'arc a, mais son cosinus; or tous les arcs ayant un cosinus donné sont compris dans la formule :

$$a = \pm \alpha + 2k\pi,$$

α étant l'un d'eux et k un nombre entier algébrique; les arcs $\frac{a}{2}$ ont donc pour valeurs :

$$\frac{a}{2} = \pm \frac{\alpha}{2} + k\pi.$$

Si k est pair, $k = 2k'$, $\frac{a}{2} = \pm \frac{\alpha}{2} + 2k'\pi$, et tous ces arcs ont deux sinus opposés :

$$\pm \sin \frac{\alpha}{2},$$

un seul cosinus : $\cos \frac{\alpha}{2}$ et deux tangentes opposées :

$$\pm \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

si k est impair, on a :

$$\sin\left(2k'\pi + \pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \mp \sin \frac{\alpha}{2}; \cos\left(2k'\pi + \pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(2k'\pi + \pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, les fonctions circulaires des arcs $\frac{a}{2}$ ont chacune deux valeurs opposées.

Si, en même temps que le cosinus on se donne l'arc a, on sait dans quel quadrant se trouve l'extrémité de l'arc $\frac{a}{2}$ et le choix des signes se fait immédiatement.

Soit, par exemple, à calculer les fonctions circulaires de l'arc $\frac{\pi}{8}$; les trois fonctions circulaires sont positives, et l'on a, en remplaçant dans les formules trouvées $\cos a$ par $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}.$$

La valeur de $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ prend une forme plus simple en multipliant les deux termes de la fraction sous le radical par $2-\sqrt{2}$; cette fraction s'écrit :

$$\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2} \quad (\sqrt{2}-1)^2;$$

et l'on a :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.$$

174. Problème. — ***Connaissant*** $\operatorname{tg} a$, ***calculer*** $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Dans la formule de multiplication par 2 pour la tangente :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

remplaçons x par $\frac{a}{2}$, nous obtenons :

$$\operatorname{tg} a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}},$$

et, en chassant le dénominateur, et ordonnant :

$$\operatorname{tg} a \quad \operatorname{tg}^2\frac{a}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = 0,$$

équation du second degré en $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, Cette équation a deux racines de signes contraires et dont le produit est égal à -1 :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}.$$

On peut expliquer ces résultats de la façon suivante.:

Soit : $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \alpha.$

Tous les arcs a ont pour valeur :

$$a = \alpha + k\pi;$$

et les arcs $\frac{a}{2}$ sont donnés par :

$$\frac{a}{2} = \frac{\alpha}{2} + k\frac{\pi}{2};$$

si k est pair, $k + k'\pi$;

$$\frac{a}{2} = \frac{\alpha}{2} + k'\pi;$$

et : $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

si k est impair, $k = 2k' + 1$:

$$\frac{a}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + k'\pi;$$

et : $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$

Tous les arcs $\frac{a}{2}$ ont donc seulement deux tangentes, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ et $-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, inverses et de signes contraires.

Si, en même temps que la tangente on se donne l'arc a, on sait dans quel quadrant est terminé l'arc $\frac{a}{2}$ et l'on connaît le signe de sa tangente, ce qui permet de choisir celle des deux racines de l'équation qui convient.

Calculons, par exemple, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; l'équation obtenue plus haut devient en y faisant : $\operatorname{tg} a = 1$:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg}\frac{a}{2} - 1 = 0;$$

et la racine positive donne : $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$

Soit encore à calculer $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg}\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0;$$

ou : $$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{a}{2} - 1 = 0;$$

et la racine positive donne :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

175. Problème. — ***Connaissant*** $\sin a$, ***calculer*** $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Dans la formule de multiplication par 2 pour le sinus :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

remplaçons x par $\frac{a}{2}$, nous obtenons :

$$2 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2} = \sin a.$$

qui, avec la relation :

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1,$$

forme un système de deux équations en $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$. Ce système a une forme bien connue, et donne, en ajoutant puis en retranchant membres à membres :

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} + 2 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2} = 1 + \sin a;$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} - 2 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2} = 1 - \sin a;$$

c'est-à-dire .

$$\left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 + \sin a; \quad \left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)^2 = 1 - \sin a;$$

d'où l'on tire :

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin a},$$

$$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin a};$$

système du premier degré, qui donne, par addition et soustraction :

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}[\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}], \quad (1)$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}[\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}]; \quad (2)$$

les signes se correspondant devant les radicaux.

Ainsi, on trouve quatre valeurs pour $\sin\frac{a}{2}$ quatre pour $\cos\frac{a}{2}$
Les quatre valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ sont les mêmes que celles de $\cos\frac{a}{2}$.
mais la correspondance des signes montre que ce ne sont pas des valeurs égales qui sont prises ensemble.

En divisant membres à membres les deux égalités (1), on obtient :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{\pm\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}};$$

mais $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ n'a que deux valeurs, inverses l'une de l'autre :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1-\sin a} \pm \sqrt{1+\sin a}};$$

les autres combinaisons des signes donnant les mêmes résultats.

Cherchons encore à nous rendre compte à priori de l'existence des solutions obtenues.

Si l'on donne : $\sin a = \sin \alpha$;

les arcs a sont compris dans l'une des formules :

$$a = \alpha + 2k\pi, \qquad a = \pi - \alpha + 2k\pi,$$

et leurs moitiés ont pour valeurs :

$$\frac{a}{2} = \frac{\alpha}{2} + k\pi; \qquad \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + k\pi.$$

Si k est pair, $k = 2k'$, on a :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2k'\pi\right) = \sin\frac{\alpha}{2}; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2k'\pi\right) = \cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 2k'\pi\right) = \cos\frac{\alpha}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\alpha}{2} + 2k'\pi\right) = \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + 2k'\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2k'\pi\right) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Si k est impair, $k = 2k' + 1$, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k'\pi + \pi\right) = -\sin\frac{\alpha}{2}; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2k'\pi + \pi\right) = -\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 2k'\pi + \pi\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2k'\pi + \pi\right) = -\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + 2k'\pi + \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + 2k'\pi + \pi\right) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2},$$

et l'on voit que l'on doit bien trouver pour les arcs $\frac{\alpha}{2}$ quatre sinus et quatre cosinus, qui sont :

$$\pm\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \pm\cos\frac{\alpha}{2};$$

et seulement deux valeurs pour leurs tangentes :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2};$$

inverses l'une de l'autre.

Si, en même temps que l'on donne $\sin a$, on donne l'arc a, l'extrémité de l'arc $\frac{a}{2}$ est déterminée, on connaît les signes et les grandeurs relatives absolues du sinus et du cosinus, ce qui détermine les signes à choisir devant les radicaux.

Exemple. — ***Connaissant*** $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ***calculer les fonctions circulaires de l'arc*** $\frac{\pi}{12}$.

L'arc $\frac{\pi}{12}$ est terminé dans le premier quadrant; son sinus et son cosinus sont positifs; il est inférieur à $\frac{\pi}{4}$; le cosinus est donc supérieur au sinus. Nous prendrons donc, pour le cosinus les deux signes + devant les radicaux, pour le sinus, le signe + devant le premier et le signe — devant le second.

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}} - \sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}} + \sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

APPLICATIONS TOPOGRAPHIQUES DE LA TRIGONOMETRIE

176. Problème I. — ***Trouver la distance d'un point accessible à un point inaccessible.***

Soit A un point accessible et M un point qui ne l'est pas, séparé, par exemple, de la région accessible par une rivière.

On prend, dans la région accessible, un second point B; on mesure la distance $AB = d$, puis, à l'aide du graphomètre, en visant le point M de A et de B, on détermine les angles :

$$MAB = \alpha; \qquad MBA = \beta.$$

On a alors :

$$\frac{AM}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{d}{\sin(\alpha+\beta)};$$

d'où :
$$AM = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

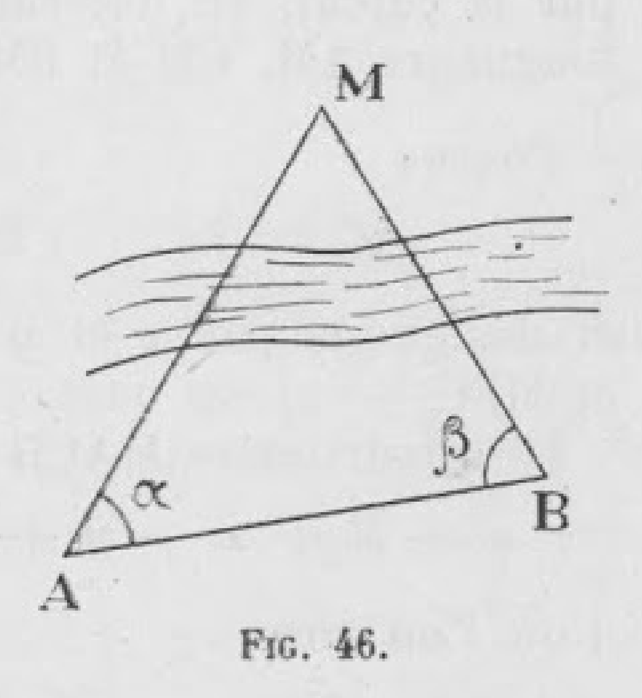


Fig. 46.

177. Problème II. — *Trouver la distance de deux points inaccessibles.*

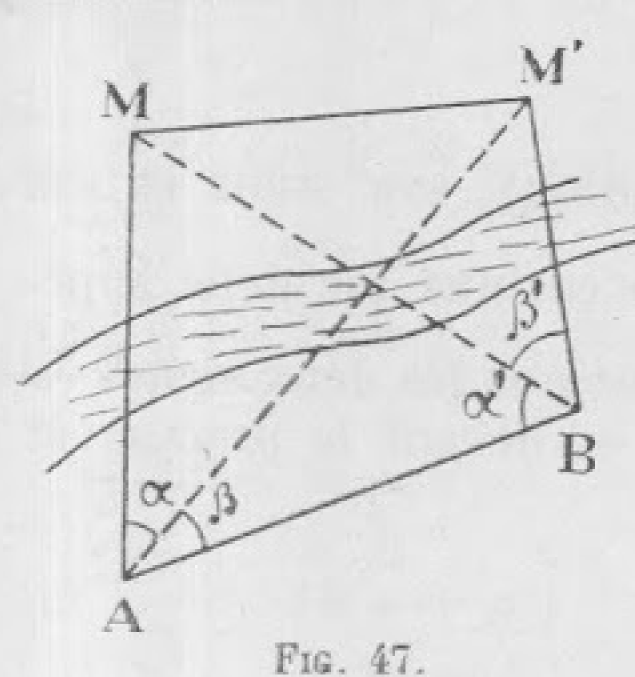


FIG. 47.

On trace, dans la région accessible, une base, c'est-à-dire un segment de droite AB choisi de façon que la mesure en soit possible.

Soit : AB $= d$.

On mesure, ensuite, à l'aide du graphomètre, les angles :

$$\text{MAM}' = \alpha; \qquad \text{M}'\text{AB} = \beta;$$

$$\text{MBA} = \alpha'; \qquad \text{M}'\text{BM} = \beta'.$$

Dans les triangles MAB et M'AB, on connaît le côté AB $= d$, et les angles adjacents; on peut calculer AM et AM' :

$$\frac{\text{AM}}{\sin \alpha'} = \frac{p}{\sin(\alpha + \alpha' + \beta)}; \qquad \frac{\text{AM}'}{\sin(\alpha' + \beta')} = \frac{d}{\sin(\alpha' + \beta + \beta')}.$$

AM et AM' étant connus, on résoud le triangle AMM', dont on a deux côtés et l'angle compris, ce qui donne MM'.

178. Problème III. — **Problème de la carte.** — ***Trois points*** A, B, C, ***d'un terrain, ayant été reportés sur une carte, déterminer sur cette carte le point*** M, ***d'où les distances*** AC ***et*** BC ***ont été vues sous des angles*** α ***et*** β***, que l'on a mesurés.***

On pourrait traiter le problème géométriquement en décrivant sur AC un arc capable de l'angle α, et sur BC un arc capable de l'angle β. Ces deux arcs se coupent au point C et en un autre point M, qui est le point cherché. Mais le procédé manque de précision, car en faisant des constructions géométriques il est difficile de tenir compte d'un angle inférieur à un degré ou un demi-degré. On traite le problème par le calcul, en déterminant les deux angles CAM et CBM, puis les longueurs AM, CM et BM.

Posons :

$$\text{AC} = l; \qquad \text{BC} = l';$$

et désignons par x et y les angles MAC et MBC.

Le quadrilatère MACB donne :

$$\alpha + \beta + x + y + \text{C} = 400^{\text{gr}};$$

d'où l'on tire :

$$x + y = 400^{\text{gr}} - (\alpha + \beta + \text{C}). \qquad (1)$$

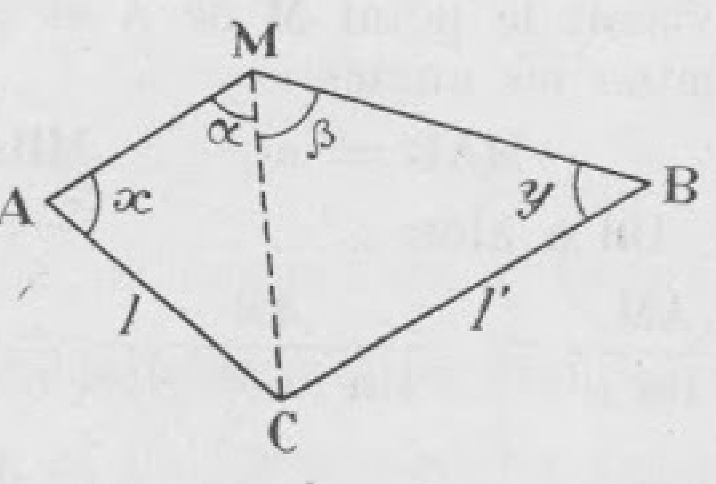


FIG. 48.

D'autre part, les deux triangles MAC et MBC donnent :

$$\text{MC} = \frac{l \sin x}{\sin \alpha}; \qquad \text{MC} = \frac{l' \sin y}{\sin \beta};$$

en égalant les deux valeurs de MC, on obtient :

$$\frac{l \sin x}{\sin \alpha} = \frac{l' \sin y}{\sin \beta},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\sin x}{l' \sin \alpha} = \frac{\sin y}{l \sin \beta} = \frac{\sin x - \sin y}{l' \sin \alpha - l \sin \beta} = \frac{\sin x + \sin y}{l' \sin \alpha - l \sin \beta} :$$

et :

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{l' \sin \alpha - l \sin \beta}{l' \sin \alpha + l \sin \beta}.$$

En transformant en produit les deux termes de la première fraction, il vient :

$$\frac{\operatorname{tg} \dfrac{x - y}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{x + y}{2}} = \frac{l' \sin \alpha - l \sin \beta}{l' \sin \alpha + l \sin \beta};$$

et :

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{l' \sin \alpha - l \sin \beta}{l' \sin \alpha + l \sin \beta} \operatorname{tg} \left(200^{\text{gr}} - \frac{\alpha + \beta + \text{C}}{2}\right);$$

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{l \sin \beta - l' \sin \alpha}{l \sin \beta + l' \sin \alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \text{C}}{2}.$$

Egalité qui détermine la différence $\frac{x - y}{2}$ et, avec l'équation (1), les angles x et y.

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait :

$$\alpha + \beta + \text{C} < 400^{\text{gr}}.$$

Toutefois, si l'on avait :

$$l \sin \beta = l' \sin \alpha, \qquad (2)$$

le problème serait indéterminé, le premier facteur de $\operatorname{tg} \frac{x - y}{2}$ est nul, le second :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + \text{C}}{2}$$

serait infiniment grand, car la condition (2) exprime que les rayons

des cercles circonscrits aux triangles MAC et MBC sont égaux, le point M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC; on aurait alors :

$$\alpha + \beta + C = 200^{gr}; \qquad \frac{\alpha + \beta + C}{2} = 100^{gr};$$

et la tangente serait infinie. Le point M serait indéterminé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Mais ce cas ne se présente pas pratiquement, car on choisit le point M intérieur au triangle ABC.

179. Problème IV. — ***Déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible, et qui repose sur un sol horizontal.***

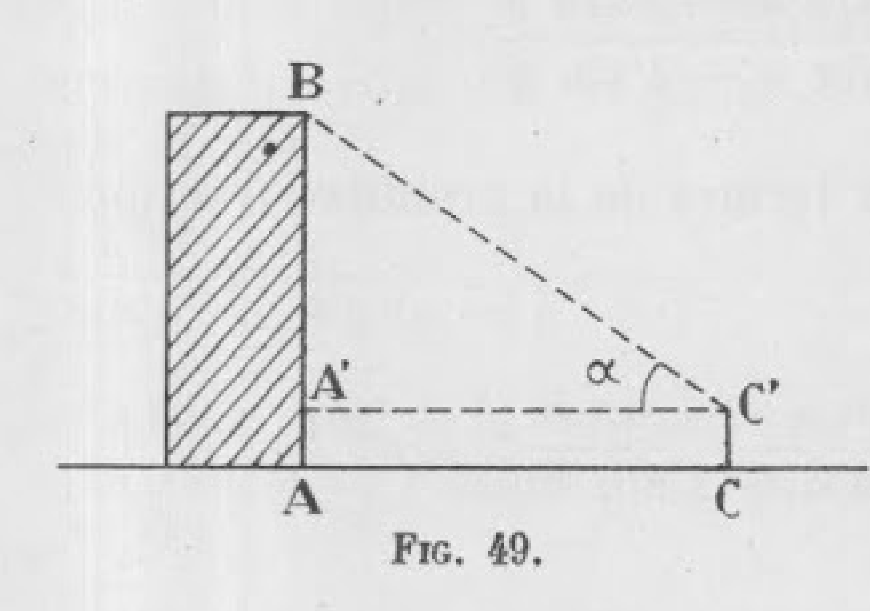


Fig. 49.

Soit à évaluer la hauteur AB de l'édifice; on mesure à partir du pied A, sur le sol horizontal, une longueur AC; on place le graphomètre de manière que son centre C' se projette en C sur le sol, et on vise le sommet B de l'édifice, ce qui donne l'angle A'C'B' = α, que fait C'B avec l'horizontale C'A'. On a alors :

$$A'B = A'C' \text{ tg } \alpha = AC \text{ tg } \alpha;$$

et si h est la hauteur du pied du graphomètre, CC' = h; on a :

$$AB = h + AC \text{ tg } \alpha.$$

180. Problème V. — ***Déterminer la hauteur d'un édifice dont le pied est inaccessible et qui repose sur un sol horizontal.***

Dans le plan horizontal sur lequel repose l'édifice, on trace une droite CD dont on mesure la longueur CD = l.

On place le graphomètre en C, puis en D, et visant le sommet B de l'édifice, on mesure les angles :

$$BC'D' = \alpha; \quad BD'C' = \beta; \quad BC'A' = \gamma.$$

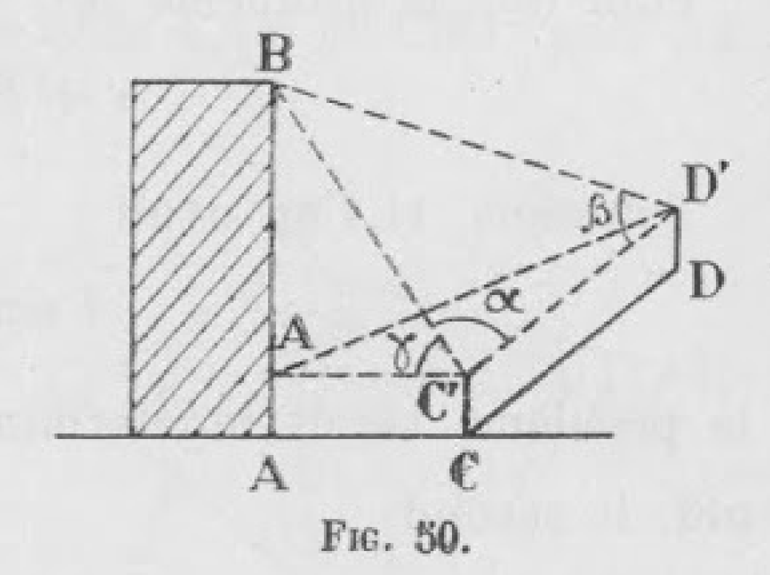


Fig. 50.

On a alors, dans le triangle BC'D' :

$$BC' = \frac{C'D' \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{CD \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Le triangle rectangle BC'A' donne ensuite :

$$A'B = BC' \sin BC'A' = \frac{l \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

En ajoutant à A'B la hauteur h du centre du graphomètre au sol, on a la hauteur cherchée :

$$AB = h + \frac{l \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Le même procédé permet de déterminer la hauteur d'une montagne dont le sommet est visible au-dessus d'un plan horizontal.

EXERCICES DE RECAPITULATION

177. 1° x et y étant deux arcs quelconques, on pose :

$$\sin \frac{x+y}{2} = z.$$

Calculer, en fonction de z, $\cos (x + y)$.

2° Sachant que l'on a : $\sin x + \sin y = 1$, calculer en fonction de z, $\cos (x - y)$.

3° Déterminer z de façon que l'on ait, en outre :

$$\cos x \cos y = \frac{3}{4}.$$

4° Déduire de tout ce qui précède les valeurs des arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ vérifiant le système :

$$\sin x + \sin y = 1; \qquad \cos x \cos y = \frac{3}{4}.$$

(Baccalauréat.)

178. 1° Montrer que le système :

$$\begin{cases} \cos a + \cos (a + x) + \cos (a + y) = 0; \\ \sin a + \sin (a + x) + \sin (a + y) = 0; \end{cases}$$

où a est donné, est équivalent au système :

$$\begin{cases} 1 + \cos x + \cos y = 0, \\ \sin x + \sin y = 0. \end{cases}$$

2° Trouver les valeurs de x et de y et montrer que les extrémités des trois arcs a, $a + x$, $a + y$, ayant même origine, sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique. *(Baccalauréat.)*

179. 1° Démontrer l'identité :

$$(1 - \cos b \cos c)^2 - \sin^2 b \sin^2 c = (\cos b - \cos c)^2.$$

2° Résoudre l'équation :

$$x^2 \sin^2 b - 2x (1 - \cos b \cos c) + \sin^2 c = 0.$$

3° u et v étant les racines, calculer :

$$\frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{u} - \sqrt{v}}.$$

Cas où : $b = \frac{2\pi}{3}$, $c = \frac{\pi}{3}$. *(Baccalauréat.)*

180. On considère l'équation :

$$mx^2 - mpx + p = 0:$$

établir la relation que doivent vérifier les coefficients m et p, pour que les deux racines soient l'une le sinus, l'autre la tangente d'un même arc α.

De la relation trouvée, tirer p en fonction de m, remplacer dans l'équation donnée, qui ne dépend plus que de m. Calculer, en fonction de m, $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, puis calculer m en fonction de α. *(Baccalauréat.)*

181. On donne un angle $xoy = \alpha$; extérieurement à cet angle et dans son plan, on construit un triangle isocèle AOB, dont la base OB est sur oy, et ayant, pour côté OA, une longueur donnée a. On désigne par x l'angle à la base de ce triangle isocèle :

1° Exprimer en fonction de a, α et x la distance MM′ du milieu M de AB à ox.

2° On suppose $\alpha = 30°$; déterminer $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, de façon que l'on ait MM′ $= ma$; m étant un nombre donné. Discuter quand m varie.

3° Dans le cas particulier, $m = \frac{3}{4}$ calculer x. *(Baccalauréat.)*

182. On considère deux demi-axes rectangulaires Ox et Oy et un cercle de rayon R, qui leur est tangent. On détermine la position d'un point M sur ce cercle par l'angle x que fait le rayon qui y aboutit avec Ox. Au point M supposé sur le quadrant BC $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ on mène la tangente au cercle, qui rencontre Ox en P et Oy en Q.

1° Evaluer en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ l'aire du triangle OPQ. Déterminer t, de façon que cette aire ait pour valeur kR. Discuter en prenant k pour paramètre. Quelle relation existe entre les deux valeurs de x, qui correspondent à un même valeur de k ?

2° De ce qui précède, déduire le mode de variation de l'aire du triangle OPQ, quand M décrit le quadrant BC. Représentation graphique. Constater l'exactitude des résultats obtenus par l'étude directe de la fonction considérée.

3° Calculer x quand : $k = 2\sqrt{3} + 3$. *(Baccalauréat.)*

183. On donne une demi-circonférence de diamètre AB $= 2$ R; on mène par A une corde AM, faisant avec AB un angle aigu x, et on projette M en P sur AB.

1° Déterminer x de façon que l'on ait :

$$\text{PM} + m\text{AP} = \text{AB};$$

m étant un nombre donné. Discuter.

2° Pour certaines valeurs de m, il y a deux angles x' et x'' répondant à la question. On pose $\alpha = x' + x''$. Calculer, en fonction de m, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

3° On pose $\operatorname{tg} \varphi = m$. Quelle relation existe-t-il entre les angles φ et α ? Pour quelle valeur de m aura-t-on $\alpha = \varphi$? Quelles sont les valeurs correspondantes de x' et x'' ? *(Baccalauréat.)*

184. On donne une demi-circonférence de centre O et de diamètre AB $= 2$ R. On prend sur cette demi-circonférence un point M défini par l'angle $\widehat{\text{OAM}} = x$. On joint OM et on construit sur OM comme côté un triangle équilatéral AMC extérieur au triangle AOM.

1° Calculer en fonction de x et de R l'aire du quadrilatère AOMC.

2° Déterminer x de façon que l'aire de ce quadrilatère ait un valeur donnée mR. Discuter en prenant m pour paramètre.

3° Calculer x dans les deux cas suivants :

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ (*Baccalauréat.*)

185. Soit A un point d'une droite D, tel que OA = a, O étant un point de la droite, B le point de la perpendiculaire à la droite D, menée par A, défini par AB = a. On joint B à un point M de la droite D, et on mène OH perpendiculaire sur MB. Soit x l'angle OMB que l'on suppose aigu; M est alors sur le prolongement de OA.

1° Calculer en fonction de a et de x les côtés et la hauteur HK du triangle rectangle OMH.

2° Déterminer x de façon que l'on ait : HK = ma, m étant un nombre donné. Discuter.

3° Pour certaines valeurs de m, le problème a deux solutions; démontrer que la somme des deux angles x correspondants est indépendante de m.

(*Baccalauréat.*)

186. On donne un cercle O de rayon R, un diamètre BOA de ce cercle, et on trace le rayon OC, qui fait avec OA l'angle $\frac{\pi}{4}$.

Dans l'angle AOC, on prend un rayon OM, qui fait avec OC un angle MOC = α. La perpendiculaire menée de M sur OC coupe en A_1 et B_1 les tangentes menées au cercle en A et B, et en I le diamètre parallèle à ces tangentes.

1° Calculer, en fonction de R et de α, les bases $AA_1 = x$, $BB_1 = y$, du trapèze AA_1B_1B, la longueur OI et le côté A_1B_1.

Montrer que l'on a :

$$y + x = 2\,R\sqrt{2}\cos\alpha; \qquad y - x = 2\,R.$$

2° On fait tourner la figure autour de AB. Calculer, toujours en fonction de R et α, l'aire S engendrée par le côté A_1B_1, et le volume engendré par le trapèze AA_1B_1B. Soit V ce volume.

3° Déterminer α de manière qu'entre V et S on ait la relation :

$$V = \frac{1}{6}kS;$$

k étant un paramètre arbitraire. Discuter par rapport à k.

(*Baccalauréat.*)

187. Dans un cercle de rayon R, on mène deux rayons OA, OB, faisant entre eux un angle 2α, puis les tangentes en A et B, qui se coupent en un point C; on fait tourner la figure ainsi obtenue autour d'un diamètre P′P du cercle, extérieur à l'angle AOB.

1° Exprimer le volume V engendré par le quadrilatère OACB, en fonction de R, de α et de l'angle aigu x, que fait la droite OC avec le diamètre PP′.

2° Exprimer le volume V_1 engendré par le secteur de cercle compris entre les deux rayons OA, OB et l'arc AB;

3° Montrer que le rapport $\frac{V_1}{V}$ reste constant quand x varie, R et α restant constants;

4° Déterminer α de façon que ce rapport ait une valeur donnée m. Discuter.

(*Baccalauréat.*)

188. Soit B le centre et r le rayon d'un cercle donné. Un deuxième cercle de centre C coupe le premier en A et A′; son rayon CA est tangent au cercle B et l'angle ABC = x. On désigne par H l'intersection de AA′ avec BC et par E et F les points de rencontre du segment BC avec les deux cercles B et C.

1° Calculer en fonction de r et de x le rayon R du cercle C, les segments HE, HF et EF.

2° Déterminer x de façon que EF = mAB, m désignant un nombre donné. Discuter.

3° On prend $m = \sqrt{3} - 1$. Calculer x. (*Baccalauréat.*)

189. Soit M un point situé sur un quart de cercle AOB, de rayon R. On abaisse de M la perpendiculaire MC sur le rayon OB, et on trace la droite MA.

Déterminer l'angle AOM = x, de telle façon que :

$$AM + 2\,MC = l;$$

l étant un longueur donnée. Discuter. (*Baccalauréat.*)

190. On considère une demi-circonférence décrite sur AB = 2 R, comme diamètre, et un point C sur le prolongement de BA, à une distance d de A.

Trouver sur la demi-circonférence un point M, tel que la distance MC soit la demi-somme des distances MA et MB. Discuter.

On prendra comme inconnue l'angle BAM = x. (*Baccalauréat.*)

191. On donne une demi-circonférence de diamètre AB = 2 R, et l'on considère la tangente BX à l'extrémité B de ce diamètre. On demande de mener par A une sécante, faisant avec AB un angle x, qui coupe le cercle en D, de telle façon que l'on ait :

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 4\,mR.$$

Calculer l'angle x et discuter le problème en faisant varier m, qui est une longueur. Ensuite on considère la fonction :

$$y = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2;$$

étudier les variations de cette fonction, quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et déduire de cette étude les résultats de la discussion précédente. (*Baccalauréat.*)

192. Dans un triangle ABC, où l'angle A est supposé droit, on mène la bissectrice de l'angle B, qui rencontre le côté AC en un point D. Supposant connue la longueur AD = d, et l'angle B, établir des formules permettant de calculer par logarithmes la longueur l de la bissectrice AD et les longueurs des côtés du triangle.

On cherchera ensuite à déterminer l'angle B par la condition que le rapport

$$\frac{BC}{DC}$$

soit égal à un nombre positif donné α. Condition de possibilité; nombre des solutions. Dans le cas où $\alpha = \sqrt{3}$, quelle est la valeur de l'angle B en degrés ?

(*Baccalauréat.*)

193. On donne une circonférence O de rayon R, tangente à une droite fixe X′X au point A; d'un point quelconque M de la circonférence, on abaisse MP, perpendiculaire sur X′X, et l'on prend PB = PA.

Evaluer, en fonction de l'angle XAM = x, et du rayon R du cercle O, le rayon y du cercle inscrit dans le triangle AMB, et étudier la variation de y quand le point M se déplace vers la circonférence. (*Baccalauréat.*)

194. Un rectangle OAMB a deux de ses côtés OA et OB sur les côtés fixes d'un angle droit xOy; le rectangle se déforme de manière que la diagonale OM conserve une longueur constante d. On construit le carré MACD extérieur au rectangle. Calculer en fonction de d et de l'angle $x = \widehat{AOM}$, l'aire du rectangle OCDB. Déterminer x pour que cette aire ait une valeur donnée md^2. Discuter. Quelle est la valeur de l'angle α correspondant au maximum de l'aire ?

(Baccalauréat.)

195. On donne un triangle AOB, rectangle en O, dans lequel le rapport :

$$\frac{OA}{OB}$$

des deux côtés de l'angle droit est égal à un nombre positif donné m. On joint A et B à un point M de la bissectrice Oz de l'angle droit du triangle, et on désigne par x et y les angles OAM et OBM.

1° Trouver une relation qui existe entre ces deux angles et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$m \operatorname{tg} x\,(1 + \operatorname{tg} y) = \operatorname{tg} y\,(1 + \operatorname{tg} x).$$

2° Former l'équation du second degré, qui donne $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ sachant que $x = 2y$, et trouver à quelle condition doit satisfaire m pour qu'il existe sur la droite Oz un point et un seul, pour lequel on ait $x = 2y$. *(Baccalauréat.)*

196. On donne deux cercles tangents intérieurement au point A, l'un de centre O et de rayon $R\sqrt{3}$, l'autre de centre O′ et de rayon R. Soit AP une corde du cercle O, AQ la corde du cercle O′ perpendiculaire à AP.

Déterminer l'angle $OAP = x$, de telle façon que l'on ait :

$$AP + AQ = 2mR;$$

m étant un nombre positif donné. Discuter.

Valeurs de x pour les valeurs remarquables de m.

(Baccalauréat.)

197. 1° Représenter graphiquement les variations de la fonction :

$$y = 3 - 4 \sin^2 x.$$

On déterminera la période de la fonction et les symétries de la courbe représentative.

2° Discuter, suivant les valeurs attribuées au paramètre m, l'équation :

$$\sin 3x - m \sin x = 0;$$

on se servira du graphique précédent. Connaissant une solution particulière $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, on exprimera toutes les solutions qui s'en déduisent.

(Saint-Cyr.)

198. Soit ABC un triangle, AD la bissectrice intérieure de l'angle A, le point D étant sur BC. On donne :

$$BC = a; \quad b + c = l \ (l > a) \quad \text{et} \quad AD = d.$$

1° Vérifier l'égalité : $d^2 = bc \times \dfrac{l^2 - a^2}{l^2}$.

2° Former l'équation du second degré, dont les racines sont b et c. Les longueurs a, l étant fixes, trouver entre quelles limites peut varier d pour que le triangle existe.

3° Calculer $\cos \frac{A}{2}$. Évaluer la projection orthogonale de AD sur l'un des côtés AB ou AC. Déduire du résultat la construction du triangle ABC, connaissant les longueurs a, l, d. Discuter. *(Baccalauréat.)*

199. Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle A coupe le côté opposé BC au point D. On suppose que la bissectrice est moyenne proportionnelle entre les segments BD et DC, déterminés sur le côté BC.

1° En évaluant la bissectrice de deux façons différentes, montrer que l'on a

$$\sin A \sin C = \sin^2 \frac{A}{2}.$$

2° Connaissant l'angle A du triangle, calculer les angles B et C. Discuter.

3° En supposant B = A, calculer les angles du triangle. On se bornera à calculer une ligne trigonométrique de l'angle A.

4° Dans le cas général, montrer qu'entre les côtés du triangle, on a la relation :

$$b + c = a\sqrt{2}.$$

(Institut électrotechnique de Toulouse.)

200. Dans un triangle rectangle, on donne l'hypoténuse a et le produit m^2 des bissectrices intérieures des angles B et C.

1° Démontrer que

$$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{m^2}{4a^2}.$$

2° Calculer les angles du triangle.

3° Démontrer que si O est le point d'intersection des bissectrices :

$$BO \times CO = \frac{m^2}{2}.$$

4° Construire le triangle : on pourra s'appuyer sur la relation précédente.

(Baccalauréat.)

TABLEAU DES PRINCIPALES FORMULES ETABLIES DANS LE COURS

Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Formules d'inversion :

$$\sin x = \sin \alpha, \quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi; \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi; \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha; \quad x = \pm \alpha + 2k\pi;$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha; \quad x = \alpha + k\pi.$$

Formules d'addition et de soustraction :

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a;$$
$$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a;$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$$

$$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad \operatorname{tg} (a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Formules de multiplication par 2 :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a; \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a;$$

$$1 + \cos 2a = 2\cos^2 a; \quad 1 - \cos 2a = 2\sin^2 a;$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

Expressions des fonctions circulaires d'un arc x en fonction de $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Transformation des sommes en produits :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2};$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2};$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2};$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2};$$

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin (p \pm q)}{\cos p \cdot \cos q}.$$

Transformation des produits en sommes :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)];$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2} [\sin (a + b) - \sin (a - b)];$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) + \cos (a + b)];$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos (a - b) - \cos (a + b)].$$

Résolution trigonométrique de l'équation :

$$a \cos x + b \sin x = c;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}; \quad \cos \alpha = \frac{c}{a} \cos \varphi; \quad x' = \varphi + \alpha + 2k'\pi; \quad x'' = \varphi - \alpha + 2k''\pi;$$

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Résolution des triangles rectangles :

$$\mathrm{B} + \mathrm{C} = 100^{\mathrm{gr}} \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = a \cos \mathrm{C} \qquad c = a \cos \mathrm{B}$$
$$b = a \sin \mathrm{B} \qquad c = a \sin \mathrm{C}$$
$$b = c \operatorname{tg} \mathrm{B} \qquad c = b \operatorname{tg} \mathrm{C}$$
$$b = c \operatorname{cotg} \mathrm{C} \qquad c = b \operatorname{cotg} \mathrm{B}$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} bc.$$

Triangles quelconques. Systèmes fondamentaux :

$$\text{I.} \quad \frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2\mathrm{R}; \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 200^{\mathrm{gr}};$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} a = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \mathrm{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \mathrm{C} \end{cases} \qquad \text{III.} \quad \begin{cases} a = b \cos \mathrm{C} + c \cos \mathrm{B} \\ b = c \cos \mathrm{A} + a \cos \mathrm{C} \\ c = a \cos \mathrm{B} + b \cos \mathrm{A} \end{cases}$$

Surface :

$$S = \frac{1}{2}\ bc \sin A = pr = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}\ ah_c.$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Dérivées des fonctions circulaires :

Fonctions.	**Dérivées.**
$\sin x$	$\cos x$
$\sin u$	$u' . \cos u$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{tg} u$	$u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$

TABLE DES CHAPITRES

N° 48. Editions Magnard, Paris. — Dépôt légal effectué en 1945 (4e trim.)

46847. - Imprimeries Delmas, Bordeaux, 6, place Saint-Christoly (31.0192). 1945.

1. $1+\cot g^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

---

2. $2(1+\sin x)(1+\cos x) = 2(1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x)$

$= 1+\sin^2 x+\cos^2 x + 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x\cos x$

$= (1+\sin x+\cos x)^2$

---

3. $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x\,(1-\sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x\,(1-\sin x)} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

---

4. $\frac{\sin x+tg x}{tg x} = 1+\frac{\sin x}{tg x} = 1+\sin x\cos x$

---

5. $\frac{tg x+\cot g^2 x}{tg x-\cot g^2 x} = \frac{tg x+\frac{1}{tg^2 x}}{tg x-\frac{1}{tg^2 x}} = \frac{tg^3 x+1}{tg^3 x-1}$

---

6. Démontrer que $(1+tg x)\cos^2 x = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1-tg x}$

revient à démontrer que :

$(1-tg^2 x)\cos^2 x = \cos^2 x-\sin^2 x$

ce qui est, puisque :

$1-tg^2 x = 1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}$

---

7. a/ $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3 = \sin^6 x+\cos^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x$

$1 = \sin^6 x+\cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x \times 1$

(1) $\sin^6 x+\cos^6 x = 1-3\sin^2 x\cos^2 x$

b/ $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2 = \sin^4 x+\cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$

(2) $\sin^4 x+\cos^4 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x$

De (1) et (2), on tire :

$\boxed{2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x) = -1}$

---

8. $2(\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)=$

$2\left[\sin^8 x+\cos^8 x+\sin^4 x\cos^4 x+2\sin^4 x\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x(\sin^4 x+\cos^4 x)\right]$

$-(\sin^8 x+\cos^8 x)=$

$\sin^8 x+\cos^8 x+2\sin^4 x\cos^4 x+(\sin^4 x+\cos^4 x)(4\sin^2 x\cos^2 x)+4\sin^4 x\cos^4 x$

$(\sin^4 x+\cos^4 x)^2+4(\sin^4 x+\cos^4 x)\sin^2 x\cos^2 x+4\sin^4 x\cos^4 x=$

$(\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x)^2=1$ (voir (2), 7)

En résumé:

$$\boxed{2(\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x)^2-(\sin^8 x+\cos^8 x)=1}$$

---

9. voir [(1), 7] d'où:

$$\boxed{\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1}$$

---

10. $$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}y}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\frac{1}{\operatorname{tg}y}}=\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y$$

---

11. Vérifier que:

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}=\operatorname{cotg}^2 x\operatorname{cotg}^2 y-1$$

revient à vérifier que:

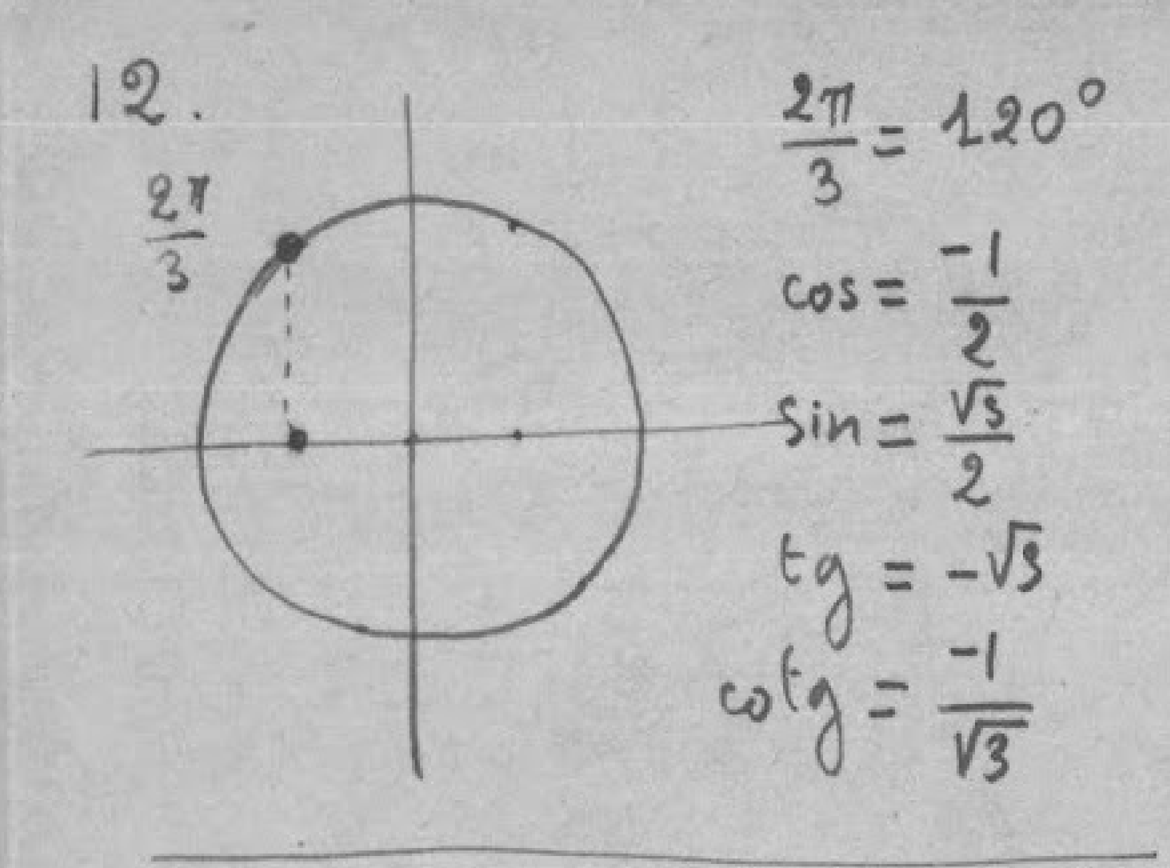
$$\cos^2 x-\sin^2 y=\frac{\cos^2 x.\cos^2 y}{\cancel{\sin^2 x.\sin^2 y}}.\cancel{\sin^2 x\sin^2 y}-\sin^2 x\sin^2 y$$

ce qui s'écrit:

$$\cos^2 x(1-\cos^2 y)=\sin^2 y(1-\sin^2 x)$$

ou $\cos^2 x.\sin^2 y=\sin^2 y\cos^2 x$ ce qui est bien vrai.

12.



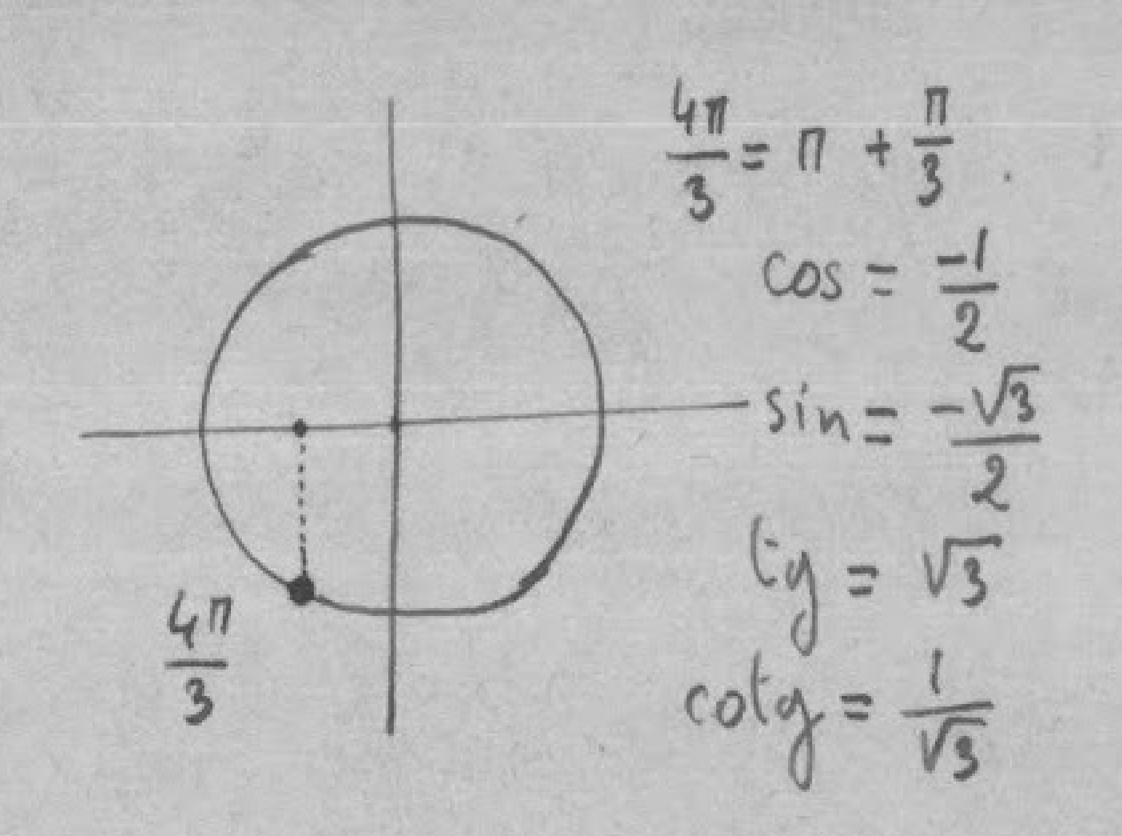
$\frac{2\pi}{3} = 120°$

$\cos = \frac{-1}{2}$

$\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg = -\sqrt{3}$

$cotg = \frac{-1}{\sqrt{3}}$



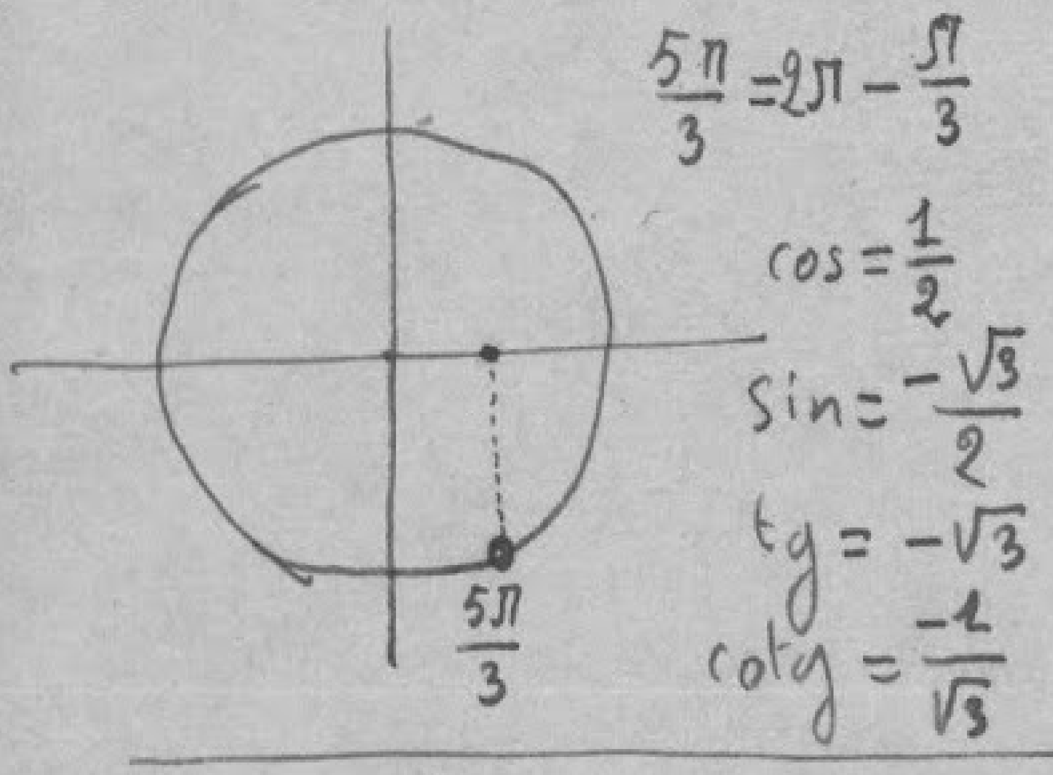
$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$

$\cos = \frac{-1}{2}$

$\sin = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$tg = \sqrt{3}$

$cotg = \frac{1}{\sqrt{3}}$



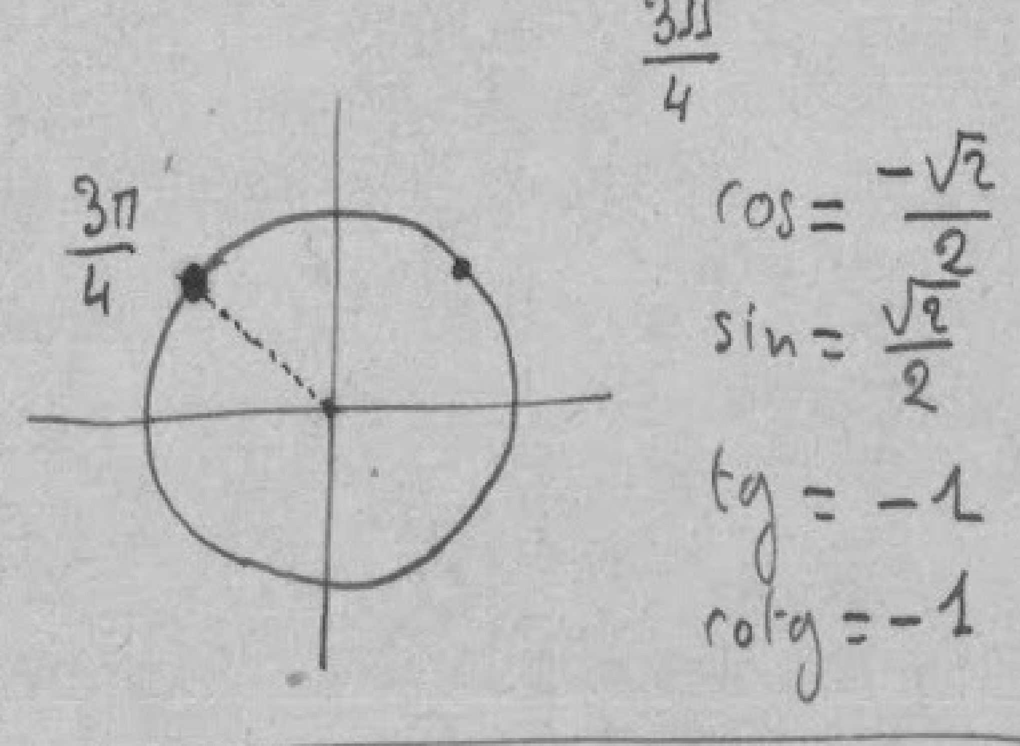
$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$\cos = \frac{1}{2}$

$\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg = -\sqrt{3}$

$cotg = \frac{-1}{\sqrt{3}}$



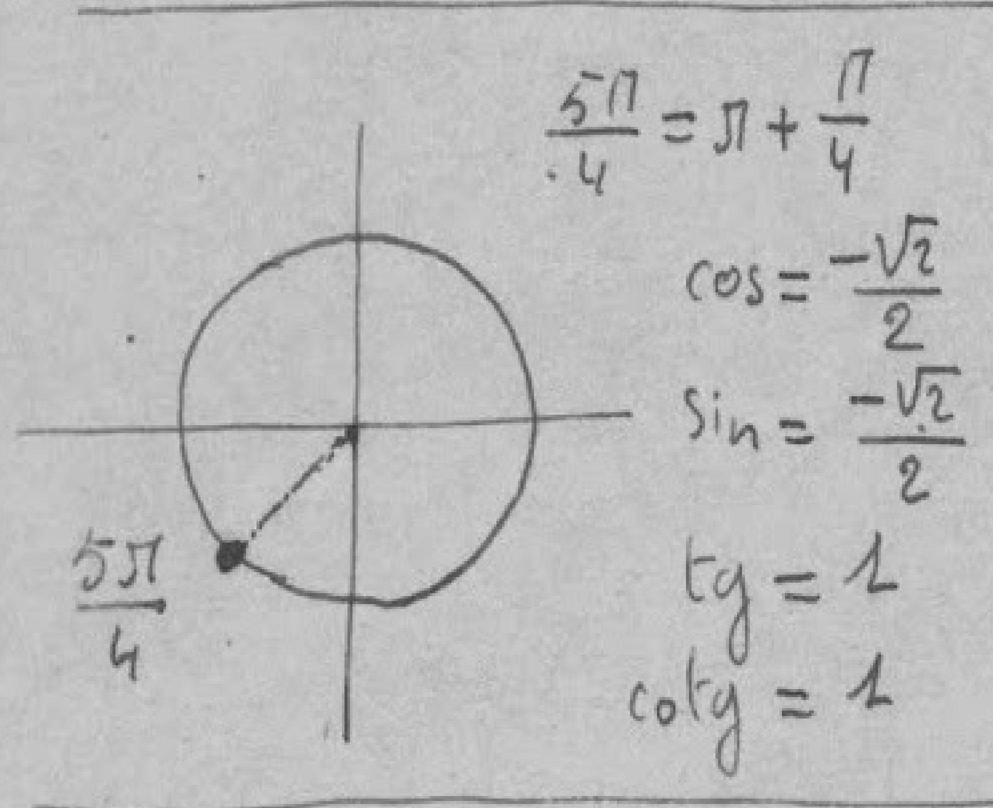
$\frac{3\pi}{4}$

$\cos = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg = -1$

$cotg = -1$



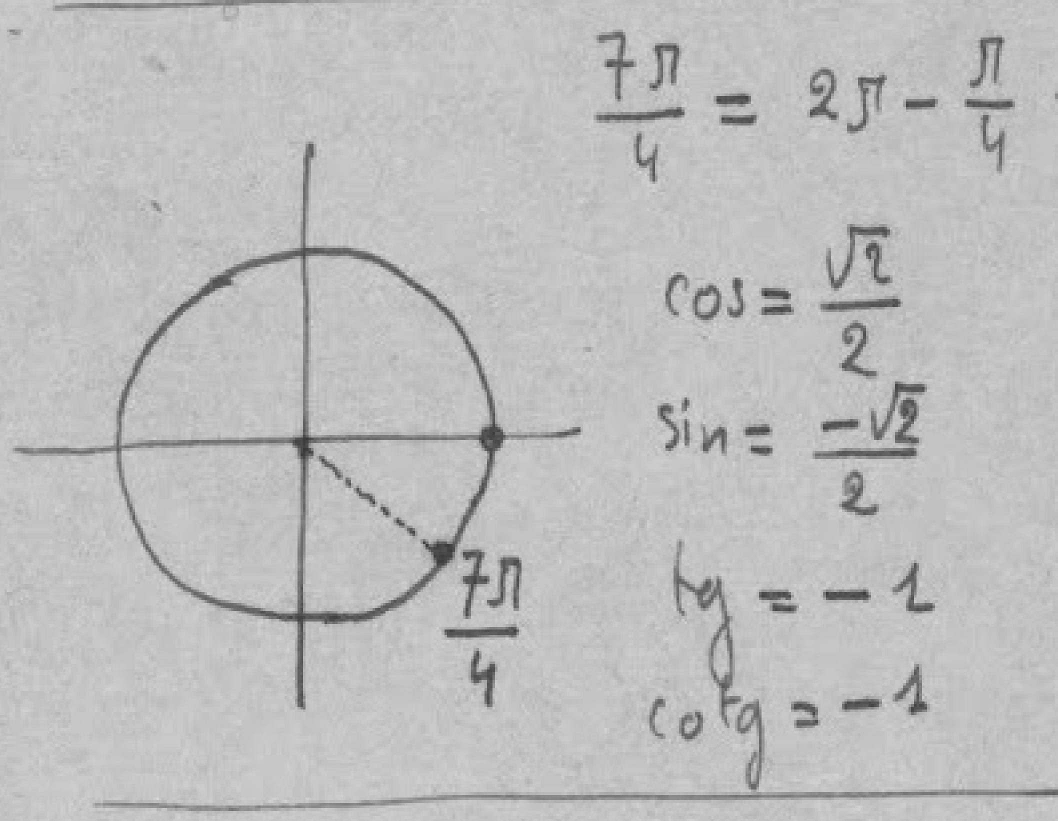
$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

$\cos = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$tg = 1$

$cotg = 1$



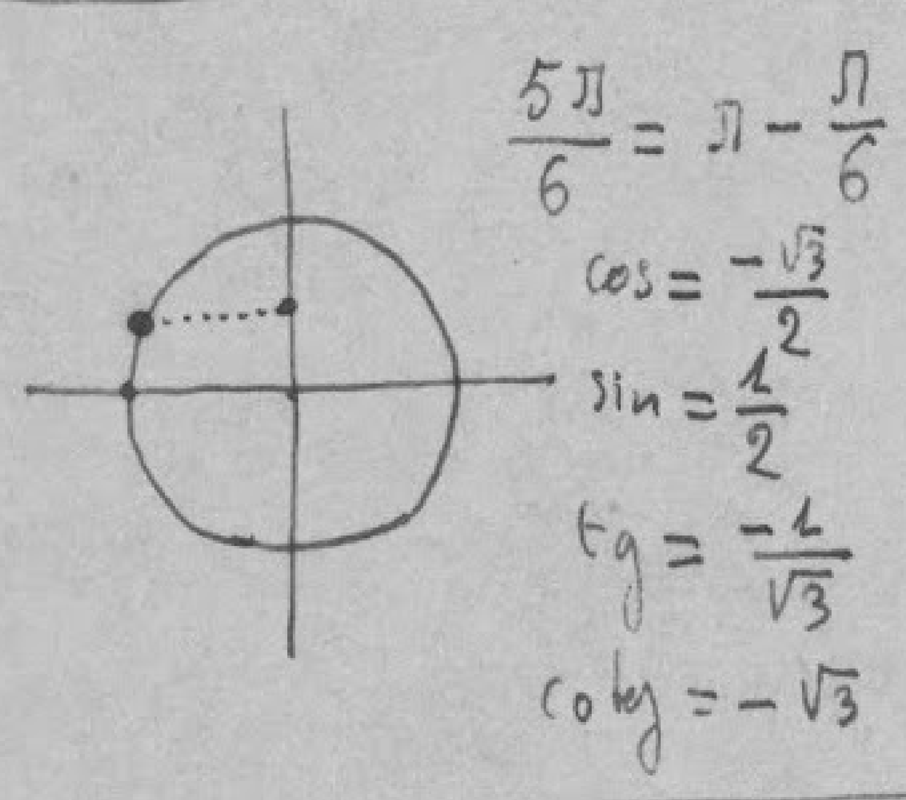
$\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$tg = -1$

$cotg = -1$



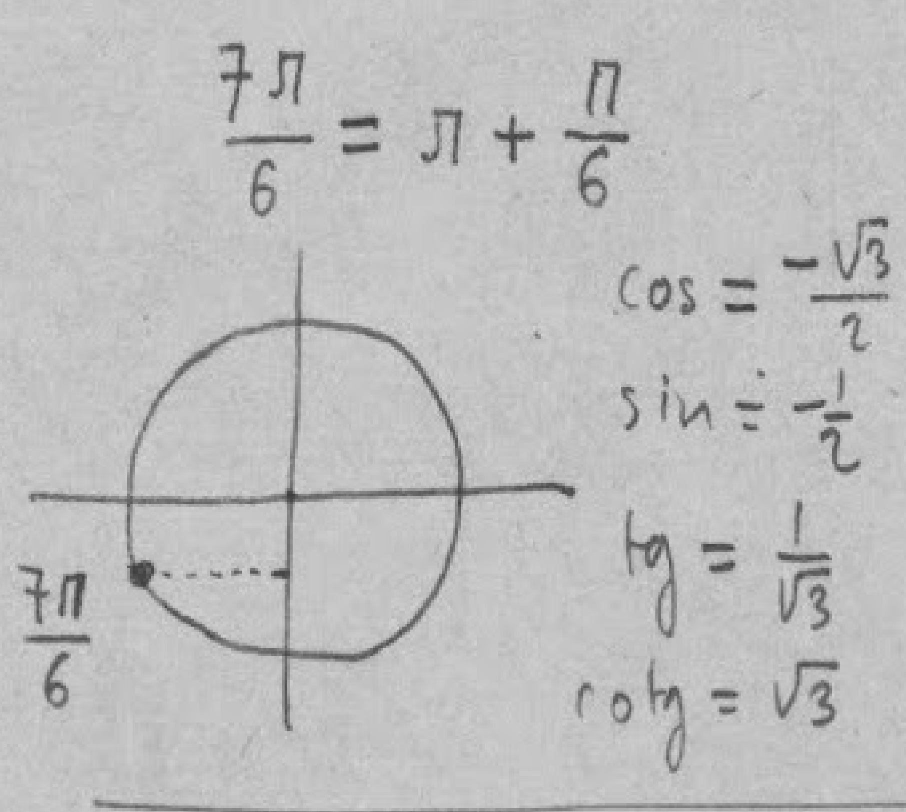
$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

$\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin = \frac{1}{2}$

$tg = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$cotg = -\sqrt{3}$



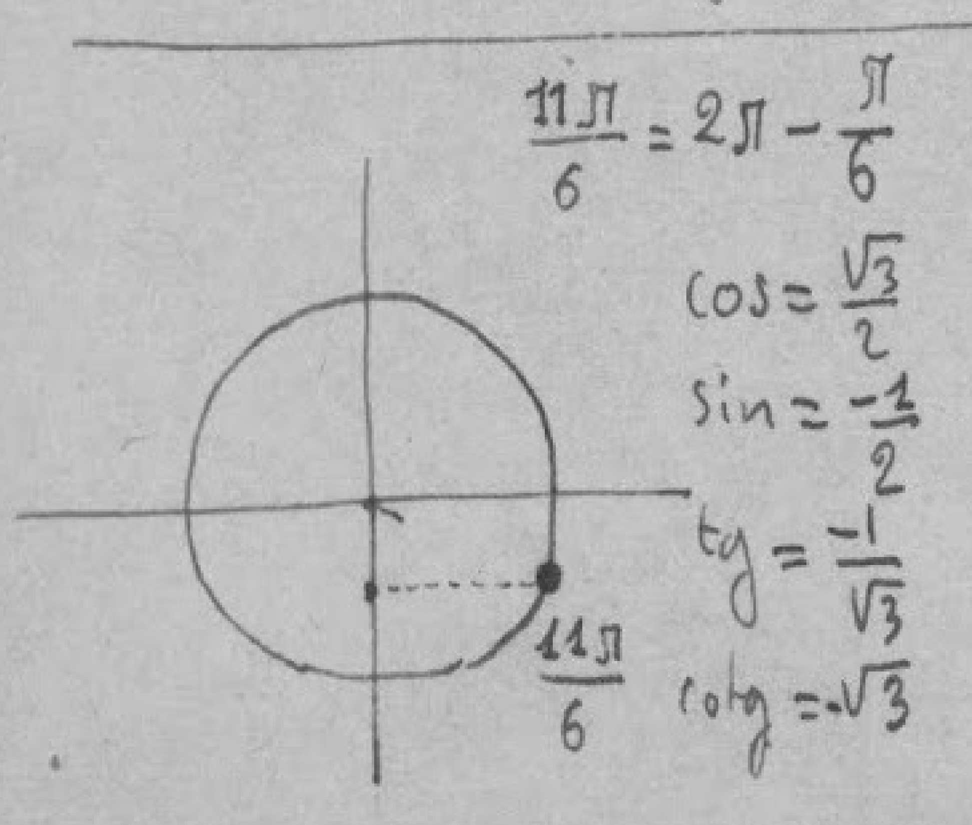
$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

$\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin = -\frac{1}{2}$

$tg = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$cotg = \sqrt{3}$



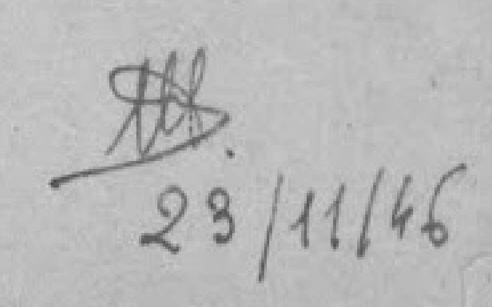
$\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin = \frac{-1}{2}$

$tg = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

$cotg = -\sqrt{3}$



13. $$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$2x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{d'où} : x = \frac{-\pi}{12} + k\pi$$

$$2x+\frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{d'où} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

---

14. $$\sin 3x = \cos 5x$$

$$\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

on est ramené à: $\cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

d'où: $5x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi$ d'où: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{2k\pi}{8} & \text{(octogone)} \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

---

15. $$\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(5x - \pi)$$

$$3x + \frac{\pi}{2} = 5x - \pi + k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{(carré)}$$

---

16. $$\operatorname{tg}\pi(2x+1) = \operatorname{tg}\pi(x+1)$$

$$\pi(2x+1) = \pi(x+1) + k\pi$$

$x = k$ (il suffit que x soit entier pour que l'équation soit vérifiée : ce qui est évident a priori.)

---

17. $$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$$

On pose $\cos x = y$, d'où l'équation:

$$4y^2 - 2(1+\sqrt{3})y + \sqrt{3} = 0$$

dont les racines sont: $y' = \frac{1}{2}$, $y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (racines visibles)

$y' = \frac{1}{2}$ donne $\cos x = \frac{1}{2}$ d'où : $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ " $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ " : $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

---

18. $$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

On pose $\operatorname{tg} x = t$; l'équation:

$$\sqrt{3}.t^2 - 4t + \sqrt{3} = 0$$

a deux racines: $t' = \sqrt{3}$, $t'' = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où l'on déduit:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

19. $$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

On pose $\sin x = y$, d'où :

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

deux racines $\frac{1}{2}$ et 2, la plus petite, seule, convient, d'où :

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

---

20. $$(1)\quad \cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0$$

$\cos x = y$, d'où : $y^2 - 5y + 6 = 0$

deux racines 2 et 3 supérieures à l'unité : l'équation (1) n'a pas de solutions.

---

21. $$\mathrm{tg}^4 x - 4\,\mathrm{tg}^2 x + 3 = 0$$

$\mathrm{tg}^2 x = t$, $\mathrm{tg}\, x = \pm\sqrt{t}$ $(t > 0)$; d'où :

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \qquad t' = 1,\ t'' = 3$$

$t' = 1$ conduit à $\mathrm{tg}\, x = \pm 1$ d'où : $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$
$t'' = 3$ conduit à $\mathrm{tg}\, x = \pm\sqrt{3}$ d'où : $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$
} 4 séries de solutions au total.

---

22. $$4\sin^2 x + (1-m)\sin x + 1 = 0$$

x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ c.à.d. $-1 < \sin x < 1$

Condition d'existence des racines : $(1-m)^2 - 16 > 0$ c.à.d. $m < -3,\ m > 5$

$af(1) = 4(6-m)$
$af(-1) = 4(4+m)$

m	$-\infty$ … -4	-4 … -3	-3 … 5	5 … 6	6 … $+\infty$
Δ	+	+ 0	−	0 +	+
$af(1)$	+	+		+	−
$af(-1)$	−	+		+	+
$X = \sin x$	$X',\ -1,\ X'',\ 1$	$-1,\ X',\ X'',\ 1$	pas de racines	$-1,\ X',\ X'',\ 1$	$-1,\ X',\ 1,\ X''$

$\frac{S}{2} = \frac{m-1}{8}$ car, dans ce cas $-1 < \frac{S}{2} < 1$

En résumé :

- $m < -4$: 1 série de solutions correspondant à $\sin x$ = la plus grande racine (X'')
- $-4 < m < -3$: 2 séries de solutions
- $-3 < m < 5$: pas de solution
- $5 < m < 6$: 2 séries de solutions
- $m > 6$: 1 série de solutions correspondant à $\sin x$ = la plus petite racine (X')

Nota : x étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, les expressions : {1 série de solutions, 2 séries de solutions} doivent être remplacées par : {1 solution, 2 solutions}

Cas limites :

m	-4	-3	5	6
$\sin x = X$	$X' = -1$, $X'' = -1/4$	$X' = X'' = -\frac{1}{2}$	$X' = X'' = \frac{1}{2}$	$X' = 1/4$, $X'' = 1$

) on calculera ensuite les valeurs correspondantes de x.

23. $\sin(a+b+c) = \sin[(a+b)+c]$

$= \sin(a+b).\cos c + \sin c.\cos(a+b)$

$= (\sin a.\cos b + \sin b.\cos a)\cos c + \sin c(\cos a.\cos b - \sin a.\sin b)$

$= \sin a.\cos b.\cos c + \sin b.\cos a.\cos c + \sin c.\cos a.\cos b - \sin a.\sin b.\sin c$

$\cos(a+b+c) = \cos[(a+b)+c]$

$= \cos(a+b).\cos c - \sin(a+b).\sin c$

$= (\cos a.\cos b - \sin a.\sin b)\cos c - (\sin a \cos b + \sin b.\cos a)\sin c$

$= \cos a.\cos b.\cos c - \sin a.\sin b.\cos c - \sin a.\cos b.\sin c - \sin b.\cos a.\sin c$

$$tg(a+b+c) = tg[(a+b)+c] = \frac{tg(a+b)+tgc}{1-tg(a+b)\,tgc} = \frac{\frac{tga+tgb}{1-tga\,tgb}+tgc}{1-\frac{tga+tgb}{1-tga\,tgb}tgc}$$

$$= \frac{tga+tgb+tgc(1-tga\,tgb)}{1-tga\,tgb-(tga+tgb)tgc} = \frac{tga+tgb+tgc-tga.tgb.tgc}{1-tga.tgb-tgb.tgc-tgc.tga}$$

$+\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$

Cas où $a=b=c=x$

· $\sin 3x = \sin x.\cos^2 x + \sin x.\cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

$= 3\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

· $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^2 x.\cos x - \sin^2 x.\cos x - \sin^2 x \cos x$

$= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$tg\,3x = \frac{3\,tg\,x - tg^3 x}{1-3\,tg^2 x}$$

---

24. Si A, B, C sont les angles d'un triangle :

$tg(A+B+C) = tg\,\pi = 0$

donc : $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$ (d'après la formule donnant $tg(a+b+c)$, ci-dessus)

---

25. $$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}{1+\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}} = \frac{tg^2\frac{x}{2}-2tg\frac{x}{2}+1}{tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}+1} = \left(\frac{tg\frac{x}{2}-1}{tg\frac{x}{2}+1}\right)^2 = tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$

---

26. $\sin 3x.\sin^3 x = (3\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x)\sin^3 x = 3\sin^4 x\cos^2 x - \sin^6 x$

$\cos 3x.\cos^3 x = (\cos^3 x - 3\sin^2 x.\cos x)\cos^3 x = \cos^6 x - 3\sin^2 x.\cos^4 x$

donc :

$\sin 3x.\sin^3 x + \cos 3x.\cos^3 x = \cos^6 x - 3\cos^4 x.\sin^2 x + 3\cos^2 x.\sin^4 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^3$

$= \cos^3 2x$

[signature] 30/III/46

27. $x+y=a$

$\cos a = \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$2\cos x \cdot \cos y \cdot \cos a = 2\cos^2 x \cdot \cos^2 y - 2\sin x \cdot \sin y \cdot \cos x \cdot \cos y$

$\sin^2 a = (\sin x \cos y + \sin y \cos x)^2 = \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos^2 x \cdot \cos^2 y + 2\sin x \sin y \cos x \cos y$

$2\cos x \cos y \cos a + \sin^2 a = \cos^2 x + \cos^2 y$

donc: $\boxed{\sin^2 a = \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cdot \cos y \cos a}$

---

28. $\boxed{a+b+c=\pi}$

donc: $\cos c = -\cos(a+b) = \sin a \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos b$

et $\cos^2 c = \sin^2 a \cdot \sin^2 b + \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos a \cdot \cos b$

donc $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c =$

$\cos^2 a + \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + \cos^2 a \cos^2 b - 2\sin a \sin b \cos a \cos b$
$+ 2\sin a \sin b \cos a \cos b - 2\cos^2 a \cos^2 b =$

$\cos^2 a + \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 a \cos^2 b = \cos^2 a + \cos^2 b + (1-\cos^2 b)\sin^2 a - (1-\sin^2 a)\cos^2 b$
$= \cos^2 a + \sin^2 a = 1$

En résumé:
$\boxed{\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1}$

---

29. $\boxed{a+b+c=2\pi}$

donc $\cos c = \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

et $\cos^2 c = \cos^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2 a \cdot \sin^2 b - 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos a \cdot \cos b$

donc: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c =$

$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2 a \cdot \sin^2 b - 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos a \cdot \cos b - 2\cos^2 a \cdot \cos^2 b + 2\sin a \sin b \cos a \cos b =$

ou $\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b =$

$\cos^2 a + \cos^2 b - (1-\sin^2 a)\cos^2 b + \sin^2 a(1-\cos^2 b) = \cos^2 a + \sin^2 a = 1$

En résumé:
$\boxed{\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c = 1}$

---

30. Nous allons démontrer l'identité:
$\boxed{\sin^2(a-b) + \sin^2 b + 2\sin(a-b)\sin b \cos a = \sin^2 a}$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$; le premier membre s'écrit donc:

$\sin^2 a \cdot \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a - 2\sin a \sin b \cos a \cos b + 2\sin a \sin b \cos a \cos b - 2\sin^2 b \cos^2 a + \sin^2 b$

c.à.d. $\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a + \sin^2 b$

c.à.d. $\sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \sin^2 a$

soit $\sin^2 a$. L'identité est donc vérifiée.

31. Calcul de $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ connaissant $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$$

l'équation $X^2+2X-1=0$ a deux racines

$X' = -1+\sqrt{2}$ correspondant à $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$

$X'' = -1-\sqrt{2}$ " à $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)$ $(X'X''=-1)$

ce résultat s'explique facilement : quand on donne $\operatorname{tg} x = 1$ on a :

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

d'où $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$: deux séries d'arcs.

Calcul de $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ connaissant $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$$

les racines de $X^2+2\sqrt{3}X-1=0$

sont $\begin{cases} X' = 2-\sqrt{3} & \text{correspondant à } \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \\ X'' = -2-\sqrt{3} & \text{correspondant à } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ (même explication que ci-dessus)

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 0,414$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 0,268$

2-12-46.

32. $\cos^2(a+x) + \cos^2 x - 2\cos a.\cos x.\cos(a+x) =$

$\cos^2(a+x) + \cos^2 x - [\cos(a+x)+\cos(a-x)]\cos(a+x) =$

$\cos^2 x - \cos(a-x).\cos(a+x) = \cos^2 x - \frac{1}{2}\left[\cos 2a + \cos 2x\right] =$

$\cos^2 x - \frac{1}{2}\left[2\cos^2 a - 1 + 2\cos^2 x - 1\right] = \sin^2 a$

33. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2b - \cos 2a) = \frac{1}{2}(2\cos^2 b - 1 - 2\cos^2 a + 1) = \cos^2 b - \cos^2 a = \sin^2 a - \sin^2 b$

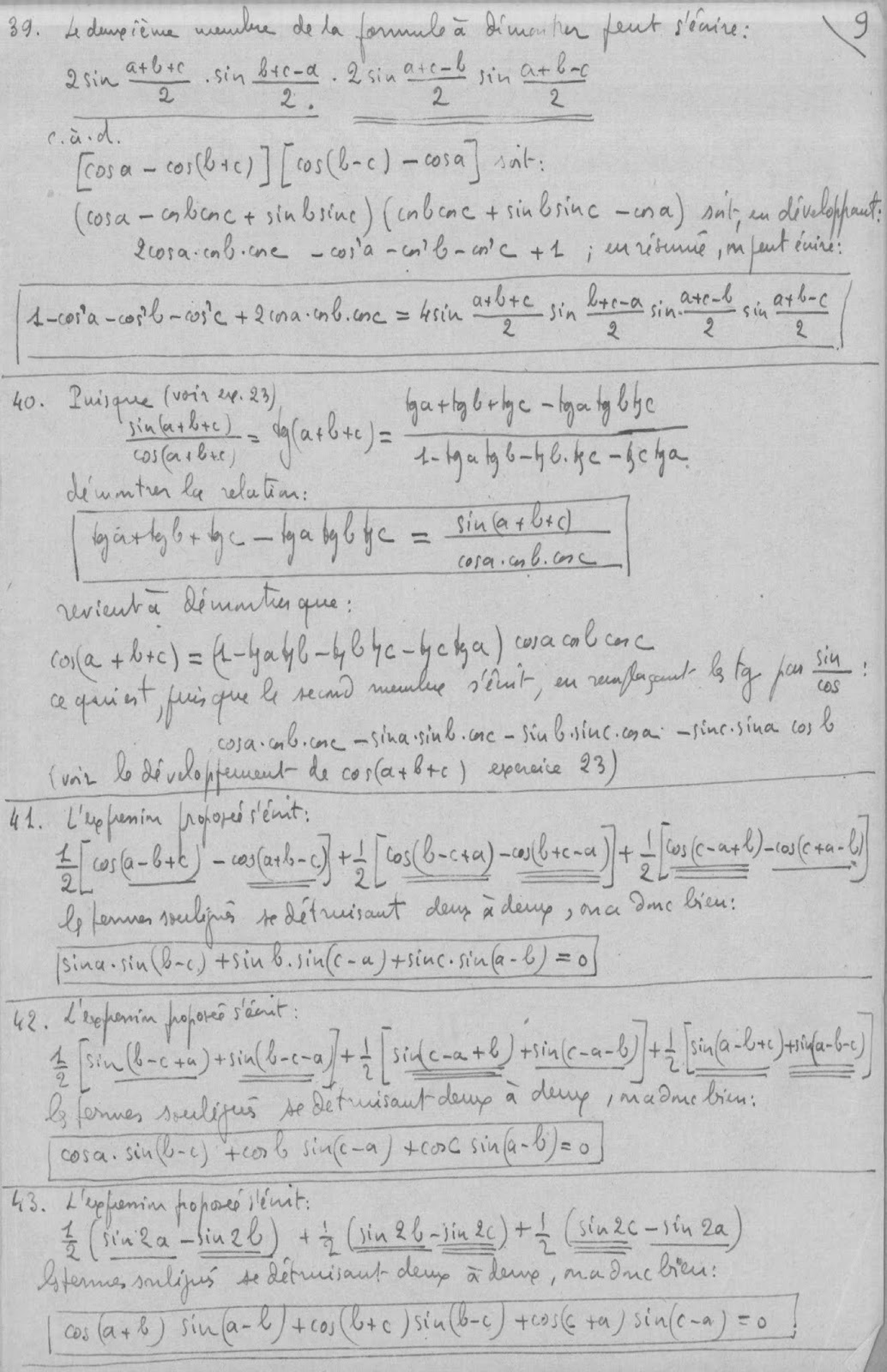
34. $\cos(a+b).\cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \frac{1}{2}(2\cos^2 a - 1 + 2\cos^2 b - 1) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$

35. $$\frac{\sin(a+b)}{\sin a+\sin b} = \frac{\sin 2\frac{a+b}{2}}{\sin a+\sin b} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}}{2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$$

36. $$\frac{\sin(a+b)}{\sin a-\sin b} = \frac{\sin 2\frac{a+b}{2}}{\sin a-\sin b} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}}{2\sin\frac{a-b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}$$

37. $$\frac{\sin(a+b)}{\cos a+\cos b} = \frac{\sin 2\frac{a+b}{2}}{\cos a+\cos b} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$$

38. $$\frac{\sin(a+b)}{\cos a-\cos b} = \frac{\sin 2\frac{a+b}{2}}{\cos a-\cos b} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{b-a}{2}}$$



39. Le deuxième membre de la formule à démontrer peut s'écrire:

$$2\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}\cdot 2\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}$$

c.à.d.

$$[\cos a-\cos(b+c)]\,[\cos(b-c)-\cos a]$$ soit:

$$(\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c)(\cos b\cos c+\sin b\sin c-\cos a)$$ soit, en développant:

$$2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+1$$; en résumé, on peut écrire:

$$\boxed{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}$$

40. Puisque (voir ex. 23)

$$\frac{\sin(a+b+c)}{\cos(a+b+c)}=\mathrm{tg}(a+b+c)=\frac{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b+\mathrm{tg}c-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b\,\mathrm{tg}c}{1-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b-\mathrm{tg}b\cdot\mathrm{tg}c-\mathrm{tg}c\,\mathrm{tg}a}$$

démontrer la relation:

$$\boxed{\mathrm{tg}a+\mathrm{tg}b+\mathrm{tg}c-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b\,\mathrm{tg}c=\frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}}$$

revient à démontrer que:

$$\cos(a+b+c)=(1-\mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b-\mathrm{tg}b\,\mathrm{tg}c-\mathrm{tg}c\,\mathrm{tg}a)\cos a\cos b\cos c$$

ce qui est, puisque le second membre s'écrit, en remplaçant les tg par $\frac{\sin}{\cos}$:

$$\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c-\sin a\cdot\sin b\cdot\cos c-\sin b\cdot\sin c\cdot\cos a-\sin c\cdot\sin a\cos b$$

(voir le développement de $\cos(a+b+c)$ exercice 23)

41. L'expression proposée s'écrit:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(a-b+c)-\cos(a+b-c)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos(b-c+a)-\cos(b+c-a)\right]+\frac{1}{2}\left[\cos(c-a+b)-\cos(c+a-b)\right]$$

les termes soulignés se détruisant deux à deux, on a donc bien:

$$\boxed{\sin a\cdot\sin(b-c)+\sin b\cdot\sin(c-a)+\sin c\cdot\sin(a-b)=0}$$

42. L'expression proposée s'écrit:

$$\frac{1}{2}\left[\sin(b-c+a)+\sin(b-c-a)\right]+\frac{1}{2}\left[\sin(c-a+b)+\sin(c-a-b)\right]+\frac{1}{2}\left[\sin(a-b+c)+\sin(a-b-c)\right]$$

les termes soulignés se détruisant deux à deux, on a donc bien:

$$\boxed{\cos a\cdot\sin(b-c)+\cos b\sin(c-a)+\cos c\sin(a-b)=0}$$

43. L'expression proposée s'écrit:

$$\frac{1}{2}(\sin 2a-\sin 2b)+\frac{1}{2}(\sin 2b-\sin 2c)+\frac{1}{2}(\sin 2c-\sin 2a)$$

les termes soulignés se détruisant deux à deux, on a donc bien:

$$\boxed{\cos(a+b)\sin(a-b)+\cos(b+c)\sin(b-c)+\cos(c+a)\sin(c-a)=0}$$

44. L'expression proposée s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2b - \cos 2a\right) + \frac{1}{2}\left(\cos 2c - \cos 2b\right) + \frac{1}{2}\left(\cos 2a - \cos 2c\right)$$

Les termes soulignés se détruisant 2 à 2, on a bien :

$$\boxed{\sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) + \sin(c+a)\sin(c-a) = 0}$$

45. Le premier membre s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2c + \cos 2b\right) + \frac{1}{2}\left(\cos 2a + \cos 2c\right) + \frac{1}{2}\left(\cos 2a + \cos 2b\right)$$; on a donc bien :

$$\boxed{\cos(b+c)\cdot\cos(b-c) + \cos(c+a)\cos(c-a) + \cos(a+b)\cos(a-b) = \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c}$$

46. Le premier membre s'écrit :

$$\frac{1}{2}\left[\sin 2b + \sin 2c\right] + \frac{1}{2}\left[\sin 2c + \sin 2a\right] + \frac{1}{2}\left[\sin 2a + \sin 2b\right]$$; donc on a :

$$\boxed{\sin(b+c)\cos(b-c) + \sin(c+a)\cos(c-a) + \sin(a+b)\cos(a-b) = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c}$$

47.
$$\sin(b+c-a) + \sin(a+c-b) = 2\sin c\cdot\cos(b-a)$$
$$\sin(a+b-c) - \sin(a+b+c) = -2\sin c\cdot\cos(a+b)$$
$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\cdot\sin b$$; donc :

$$\boxed{\sin(b+c-a) + \sin(a+c-b) + \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c) = 4\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c.}$$

48.
$$\cos(b+c-a) + \cos(a+c-b) = 2\cos c\cdot\cos(b-a)$$
$$\cos(a+b-c) + \cos(a+b+c) = 2\cos c\cdot\cos(a+b)$$
$$\cos(b-a) + \cos(a+b) = 2\cos a\cdot\cos b$$; donc :

$$\boxed{\cos(b+c-a) + \cos(a+c-b) + \cos(a+b-c) + \cos(a+b+c) = 4\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}$$

49. L'identité :

$$\boxed{\cos 3x = 4\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

résulte immédiatement de celle de l'exercice 48, où l'on fait :

$a = x$, $b = x + \frac{2\pi}{3}$, $c = x + \frac{4\pi}{3}$

et en remarquant que :

$$\cos(x+2\pi) + \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

car : $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = 0$ (cf. figure)

50. L'identité :

$$\boxed{\sin 3x = 4\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$$

résulte immédiatement de celle de l'exercice 47, où l'on fait :

$a = x$, $b = \frac{\pi}{3} + x$, $c = \frac{\pi}{3} - x$

et en remarquant que :

$$\sin\left(-x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(-x) + \sin\left(-x-\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

car $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = 0$ (cf. figure)

51. On remplace dans l'identité de l'exercice 49 x par $x+\frac{\pi}{2}$: il vient :

$$\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right) = \sin 3x = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= 4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi\right)$$
$$= 4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\times(-1)^2$$
$$= 4\times(-\sin x)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

---

52. L'équation proposée s'écrit :

$$2\sin 3x \cdot \cos x = \sin 3x$$

et se décompose donc en :

$\sin 3x = 0$ d'où deux séries de solutions : $x = \frac{2k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ d'où deux séries de solutions : $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

---

53. L'équation proposée s'écrit :

$$2\cos 4x \cdot \cos x = 2\cos 4x \cdot \cos 2x$$

qui se décompose en :

$\cos 4x = 0$ d'où $x = \pm\frac{\pi}{8} + 2k\frac{\pi}{4}$

$\cos 2x = \cos x$ d'où $2x = \pm x + 2k\pi$ c.à.d. $\begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou } x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

---

54. L'équation proposée peut s'écrire :

$$-\cot g\, 3x \cdot \cot g\, 5x = -\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\cos 5x}{\sin 5x} = 1$$

ou $\cos 3x \cdot \cos 5x + \sin 3x \cdot \sin 5x = \frac{1}{2}\left[\cos 8x + \cos 2x + \cos 2x - \cos 8x\right] = 0$

ou $\cos 2x = 0$ (1) $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{2}$

R.q. En écrivant l'équation proposée sous la forme :

$$\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(5x-\pi)$$

on a immédiatement

$$(2)\quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Les formules (1) et (2) sont manifestement équivalentes.

55.

32. Cours de Mécanique pages 3, 4 et 5.

35. Théorème des projections (somme géométrique et non "résultante")
cours de Mécanique page 10.

Exercice 30 p. 47.

Probablement une faute d'énoncé, on peut remplacer par exemple, par :

$$\sin^2(a-b) + \sin^2 b + 2\sin(a-b)\sin b\cos a = +\sin^2 a.$$

Exercice 38 p. 58

Erreur : lire $\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{b-a}{2}}$ au lieu de $\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{b-a}{2}}$

Avant dernière ligne de la page 103 :

lire : sin [illegible] A au lieu de $\sin 2a$

et à la ligne précédente :

lire $\sin^2 A$ au lieu de $\sin^2 2A$.